Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου
Πανελλήνιες Εξετάσεις
3 Ιουνίου 2026

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 133

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 185

Α3. 1) Λ 2) Σ 3) Σ 4) Σ 5) Λ

Θέμα Β

Β1.

$A_h: \begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2}+1>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2 \end{cases}$ άρα $A_h = (2,+\infty)$

με τύπο $h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\ln\big(\sqrt{x-2}+1-1\big) = 2\ln\big(\sqrt{x-2}\big) = 2\ln\left((x-2)^{\frac{1}{2}}\right)$

$= 2 \cdot \frac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2)$

Β2.

Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$ διότι $x \in (2,+\infty)$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1», άρα και αντιστρέψιμη. Για το πεδίο ορισμού της h^{-1} έχουμε

$A_{h^{-1}} = h(A_h) = h\big((2,+\infty)\big) = \left(\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2), \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)\right) = \left(\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u, \lim\limits_{x\to+\infty}\ln u\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

και για τον τύπο έχουμε: $y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Άρα, $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$

Β3.

$A_h = (2,+\infty)$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\ln(x-2)\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right)$ και θέτουμε $x-2=u$ άρα έχουμε:

$\lim\limits_{u\to 0^+}\left(\ln u \frac{2\ln(u+1)}{u}\right) = -\infty$ γιατί $\lim\limits_{u\to 0^+} lnu = -\infty$ και

$\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{2\ln(u+1)}{u} = \lim\limits_{u\to 0^+}\frac{2}{u+1} = 2$ με κανόνα De L' Hospital στο όριο της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$

Θέμα Γ

Γ1.

Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$

Έστω ότι $\kappa \neq 0$, τότε από τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο ρητών συναρτήσεων έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \kappa\cdot x = \begin{cases} +\infty & ,\alpha\nu\ \kappa > 0 \\ -\infty & ,\alpha\nu\ \kappa < 0 \end{cases} \longrightarrow$ Άτοπο, διότι το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}$

Άρα, $\kappa = 0$ και η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \frac{\mu\cdot x}{x^2+1}$

Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $O(0,0)$, άρα έχουν την ίδια κλίση στο σημείο $O(0,0)$, δηλαδή $f'(0) = 1$. Η f είναι παρ/μη ως πράξη παρ/μων συναρτήσεων:

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad f'(0) = \mu \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \mu = 1$$

Γ2.

i)

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ είναι παρ/μη ως ρητή με $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

x	$-\infty$	x=-1	x=1	∞
f′	-	+	-	
f	↘	↗	↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $f(-1) = -\frac{1}{2}$ στη θέση $x = -1$

παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(1) = \frac{1}{2}$ στη θέση $x = 1$

ii)

$$f((-\infty,-1)) = \left(\lim_{x\to-1^-} \frac{x}{x^2+1}, \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) = A_1$$

$$f([-1,1]) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = A_2$$

$$f((1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}, \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2+1}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) = A_3$$

Άρα, προκύπτει ότι $f(A_f) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ για το σύνολο τιμών της f

Ισχύει ότι $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$

Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μία λύση, διότι $\frac{1}{2} \in A_2$ στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη και το ½ δεν ανήκει στα A_1 και A_3

Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \lambda > \frac{1}{2}$ και η εξίσωση $f(x) = \lambda$, δεν έχει καμία λύση διότι το $\lambda > \frac{1}{2}$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f

Γ3.

i)

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx = \left[\frac{1}{2\nu+2}x^{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}\ ,\nu \in \mathbb{N}$$

ii)

$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ και θέτω $u = x^2 + 1$, άρα $du = 2xdx$ και για $x = 0 : u = 1$ και για $x = 1 : u = 2$. Άρα,

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = I_0 = \int_1^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}[lnu]_1^2 = \frac{1}{2}ln2$$

Ισχύει ότι:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2 \quad και \quad I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2$$

Θέμα Δ

Δ1.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = g(x) + x,\ x \in \mathbb{R}$

h συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων (g συνεχής ως παραγωγίσιμη) άρα και στο $[-1,0]$

$h(0) = g(0) > 0$

$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ διότι $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα, από Θ. Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$

Η h είναι παρ/μη ως πράξη παρ/μων συναρτήσεων με $h'(x) = g'(x) + 1$

Όμως, $g'(x) \neq -1 \Leftrightarrow g'(x) + 1 \neq 0 \Leftrightarrow h'(x) = 0$ και επίσης η g' είναι συνεχής, άρα και η h' είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων. Άρα, η h' διατηρεί πρόσημο, άρα η h είναι γνησίως μονότονη, οπότε η λύση x_1 είναι μοναδική.

Δ2.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa\right) = 2\cdot 1 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1$ με κανόνα De L' Hospital στο όριο της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}(xg(x) + x^2) = 0 + 0 = 0$$

διότι η $0 < g(x) < 1 \Leftrightarrow x < xg(x) < 0$ για $x < 0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^-} xg(x) = 0$

Άρα, τα πλευρικά όρια είναι ίσα, δηλαδή $\kappa - 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ3.

i)

Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$

Η f είναι παρ/μη με $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

και θέτω $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ οπότε $2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = 2\omega^3 - 2\omega^2 - \omega^2 + 1 = 2\omega^2(\omega - 1) - (\omega - 1)(\omega + 1)$

$= (\omega - 1)(2\omega^2 - \omega - 1) = (\omega - 1)^2(2\omega + 1)$. Δηλαδή,

$$f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$$

γιατί για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι: $0 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\sigma\upsilon\nu x + 1 \leq 3$

και $0 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \leq 1$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

ii)

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x\right) = [0, +\infty)$$

διότι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varepsilon\varphi x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$ αφού $\sigma\upsilon\nu x > 0$ όταν $x \to \frac{\pi}{2}^-$

Επειδή, $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και f συνεχής, τότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, υπάρχει ένα

$x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi$

Το x_2 είναι μοναδικό, γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Δ4.

i)

Για $x \geq 0$: $f(x) = x^2(g(x) + x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $h(x) = g(x) + x \geq 0$ στο $[x_1, 0]$

Έχουμε δείξει ότι η $h(x) = g(x) + x$ είναι γνησίως μονότονη και ότι $h(0) > h(-1)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$x \geq x_1 \Leftrightarrow h(x) \geq h(x_1) \Leftrightarrow g(x) + x \geq 0$. Επίσης, $x^2 \geq 0$ άρα $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$

ii)

Γνωρίζουμε ότι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$, και έχουμε δείξει ότι η $f(x) \geq 0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα και στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

Επίσης, $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$ και το εμβαδόν χωρίζεται στη μέση από την $x = 0$. Άρα,

$$\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x + \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\pi/3} = 1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Άρα,

$$\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = 1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)\,dx = 1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3 = 1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6}\ (1)$$

Όμως,

$$\int_{x_1}^{0} x^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = -\frac{x_1^4}{4} \quad \kappa\alpha\iota$$

$$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx \ \ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ g(x_1) = -x_1$$

Συνολικά, αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε ότι:

$$\frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Και λύνοντας ως προς το ολοκλήρωμα προκύπτει το ζητούμενο:

$$-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'^{(x)}\,dx = -\frac{x_1^4}{12} + 1 + ln2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'^{(x)}\,dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3ln2 + \frac{\pi^2}{2}$$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής:

Τζιώρτζης Αλέξανδρος

ΣΥΣΤΗΜΑ