

**Απαντήσεις: Μαθηματικά κατεύθυνσης Β' Λυκείου
26 Απριλίου 2026
Εξεταζόμενη ύλη: Διανύσματα-Ευθείες-Κύκλος**

Θέμα Α

1. Απόδειξη σελίδα 83 σχολικού.
2. Τύποι σελίδες 66 και 71 σχολικού.
3.
 - i. Λ
 - ii. Σ
 - iii. Σ
 - iv. Σ
 - v. Λ

Θέμα Β

1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1. \varepsilon$
2. $\vec{\omega} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}^2 - 6 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2^2 - 6(-1) = 0$ άρα κάθετα.
3. $|\vec{\omega}|^2 = (\vec{\beta} - 2\vec{\alpha})^2 = \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\alpha}^2 = 21$
 $|\vec{\nu}|^2 = (\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 4 - 6 + 9 = 7$ άρα $|\vec{\omega}| = \sqrt{3}|\vec{\nu}|$.
4. $\lambda_u = \frac{y}{x} \Rightarrow 1 = \frac{\kappa^2 - \kappa}{\kappa} \Rightarrow \kappa^2 - 2\kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 0$ απορρίπτεται ή $\kappa = 2$ δεκτό

Θέμα Γ

1.
 - i. $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ άρα $K(2, -1)$ και $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2+2^2-4 \cdot 3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
 - ii. $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$, $KA \perp \varepsilon$ άρα $\lambda_{KA} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \frac{-1+2}{2-1} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = -1$
 $\varepsilon: y - y_A = \lambda_\varepsilon(x - x_A) \Rightarrow y = -x - 3$
 - iii. $(KK') = \sqrt{(5-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{13}$, $\rho + \rho' = \sqrt{2} + 1$ άρα $(KK') > \rho + \rho'$
 οπότε ο ένας εξωτερικός του άλλου.
2.
 - i. στην ε_1 για $x = 0, y = -\frac{3}{2}$ $A\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ άρα $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|0 \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 4 + 16|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2$
 - ii. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_\mu = -\frac{3}{4}$ και στην ε_2 για $x = 0, y = -4$ άρα $B(0, -4)$
 και M το μέσο του AB οπότε $x_M = 0, y_M = \frac{-4 - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{11}{4}$ $M\left(0, -\frac{11}{4}\right)$ σημείο της μεσοπαράλληλης
 οπότε $\mu: y - y_M = \lambda_\mu(x - x_M) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$

Θέμα Δ

- $\lambda x - y - \lambda - 2 = 0$ (κάνω πράξεις στην (1))
Πρέπει $\lambda \neq 0$ ή $-1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- για $\lambda = 0, y = -2$
 $\lambda = 1, x - y - 3 = 0$, βάζω όπου $y = -2$ άρα $x + 2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$
 $\Gamma(1, -2)$
επιβεβαιώνω την (1) για $x = 1$ και $y = -2$
- Πρέπει $D \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq \pm 1$
πρέπει $B = 0$ άρα $\lambda = 0$ για την (2)
- K ανήκει στην ε άρα $y_K = 2x_K - 1$ (3)
και $d(K, \zeta) = \rho \Rightarrow \frac{|x_K \cdot 1 + y_K \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |x_K + y_K - 2| = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_K + y_K - 2 = -6 & (4) \\ x_K + y_K - 2 = 6 & (5) \end{cases}$
Σύστημα τις (3), (4) και (3), (5) άρα $K(-1, -3)$ ή $K(3, 5)$ και δεκτό το $K(3, 5)$ αφού ανήκει στο 1 ο τεταρτημόριο (εκφώνηση)

Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής:
Τσιρώνης Βαγγέλης