

ΚΥΡΙΑΚΗ 26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

9 Μονάδες

A2. Να διατυπωθεί το Θεώρημα Bolzano και η γεωμετρική του ερμηνεία.

5 Μονάδες

A3. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις

i) Αν μια συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο R .

ii) Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ με $\alpha < \beta$, τότε ορίζεται η $\frac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha, \beta]$.

iii) Αν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1]$ μια συνεχής συνάρτηση τότε ισχύει $\int_a^\beta f^2(x) dx \geq \int_a^\beta f(x) dx$.

iv) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και παρουσιάζει ακρότατα στα a και β , τότε ισχύει ότι $\int_a^\beta f''(x) dx = 0$.

v) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία $x_0 \in \Delta$, στα οποία $f'(x_0) \neq 0$, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της f .

vi) Αν $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow R$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$, τότε είναι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

vii) Αν η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow R$ είναι συνεχής και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

7 Μονάδες

A4. Δίνεται ο ισχυρισμός: Αν για τις συναρτήσεις $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

i) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ).

ii) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(1+3) Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2}{1 + e^{1-2x}}$

B1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τη καμπυλότητα.

7 Μονάδες

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

6 Μονάδες

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f .

5 Μονάδες

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^{1-2x} \cdot f(x)$ τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{1}{2}$

4 Μονάδες

B5. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

3 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

3 Μονάδες

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $N(0, f(0))$

5 Μονάδες

Γ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

5 Μονάδες

Γ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (x-2)^2 \cdot (xf(x) + 1 - e)^2$ με $x > 0$ έχει δύο θέσεις τοπικού ελαχίστου και μία θέση τοπικού μεγίστου.

8 Μονάδες

Γ5. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x \cdot \ln(f(x))]$

4 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύουν: $f(x) \cdot \ln(x+1) + e^{-x} \geq 1$, για κάθε $x > -1$ και $f'(x) - \frac{x}{|f(x)|} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1.

5 Μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4 Μονάδες

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

4 Μονάδες

Δ4. Να δείξετε ότι: $2f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) > xf'\left(\frac{x}{2}\right)$ για κάθε $x > 0$.

7 Μονάδες

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f , να λυθεί η εξίσωση:
 $F(x-1) - F(\ln x) = F(x+2) - F(3+\ln x)$, για $x \geq 0$

5 Μονάδες

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ..
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1,5) ώρα μετά την έναρξη του διαγωνίσματος.

Καλή τύχη!!!
Με ηρεμία και αυτοσυγκέντρωση!!!

Τα θέματα επιμελήθηκε ο καθηγητής
Φούντος Χρήστος