

Μαθηματικά κατεύθυνσης Β' Λυκείου
26 Απριλίου 2026
Εξεταζόμενη ύλη: Διανύσματα-Ευθείες-Κύκλος

Θέμα Α

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ σε ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο
$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

(Μονάδες 8)
2. Να αναφέρετε την γενική μορφή εξίσωσης μιας ευθείας και τον τύπο της απόστασής της από ένα σημείο $M(x_0, y_0)$.

(Μονάδες 7)
3. Να χαρακτηρίσετε με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις :
 - i. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{d} = (-A, B)$.
 - ii. Η ευθεία $-3y = -2x - 6$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x' .
 - iii. Αν μια ευθεία είναι παράλληλη στον x' τότε έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.
 - iv. Αν $A^2 + B^2 > 4\Gamma$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο.
 - v. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\omega} = \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$ και $\vec{\nu} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ είναι κάθετα τότε :

1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 6)
2. Να δείξετε ότι τα $\vec{\omega}$ και $\vec{\nu}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 6)
3. Να βρείτε την σχέση που συνδέει τα μέτρα των $\vec{\omega}$ και $\vec{\nu}$.

(Μονάδες 8)
4. Να βρείτε το κ ώστε το $\vec{\nu} = (\kappa^2 - \kappa, \kappa)$ να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x' .

(Μονάδες 5)

Θέμα Γ

1. Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$.

- Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.
- Να γράψετε την άλλη μορφή εξίσωσης του κύκλου και να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $A(1, -2)$.
- Να δείξετε ότι ο C και ο $C': (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 1$ δεν εφάπτονται.

(Μονάδες 12)

2. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 3x + 4y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x + 4y + 16 = 0$

- Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των ευθειών.
- Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών.

(Μονάδες 13)

Θέμα Δ

Δίνεται η εξίσωση $y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε λ .

(Μονάδες 5)

2. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της εξίσωσης (1) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του.

(Μονάδες 7)

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) και η ευθεία $x - \lambda y + \lambda - 2 = 0$ (2) τέμνονται και στην συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (2) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 7)

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C του οποίου το κέντρο βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon: y = 2x - 1$. Για τον κύκλο έχουμε ακτίνα $\rho = 3\sqrt{2}$ και ότι η ευθεία $\zeta: x + y - 2 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο.

(Μονάδες 6)

Καλή επιτυχία!

Τα θέματα επιμελήθηκε ο καθηγητής:

Τσιρώνης Βαγγέλης