ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 144
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 74
Α3.

- **i)** Σ
- **ii)** Λ
- **iii)** Λ
- **iv)** Σ
- **v)** Σ
- **vi)** Λ
- **vii)** Σ

Α4.

i) Ψευδής (Ψ).

ii) Αντιπαράδειγμα για τις συναρτήσεις: $g(x)=x+|x|$ και $f(x)=x-|x|$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $f'(x)=\dfrac{-2\cdot\left(1+e^{1-2x}\right)'}{\left(1+e^{1-2x}\right)^2}=....=\dfrac{4e^{1-2x}}{\left(1+e^{1-2x}\right)^2}>0$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Είναι: $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=....=\dfrac{8e^{1-2x}\cdot\left(e^{1-2x}-1\right)}{\left(1+e^{1-2x}\right)^3}$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ και κοίλη στο $\left[\dfrac{1}{2}.+\infty\right)$ παρουσιάζοντας σημείο καμπής στο $x=\dfrac{1}{2}$ με $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{1+e^0}=\dfrac{2}{2}=1$

Β2. Αφού η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα, θα είναι και «1-1» άρα και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της θα ισούται με το σύνολο τιμών της f, άρα:

$$D_{f^{-1}}=f(\mathrm{A})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,2)$$

Θέτω: $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{2}{1+e^{1-2x}}=y\Leftrightarrow......\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2-y}{y}\right)$

Άρα: $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2-x}{x}\right)$

Β3. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $x \in R$, η C_f δεν παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x\cdot\left(1-e^{1-2x}\right)} = \ldots = 0$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-0x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(1-e^{1-2x}\right)} = 0$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x\cdot\left(1-e^{1-2x}\right)} = \ldots = 0$

Και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-0x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{\left(1-e^{1-2x}\right)} = 2$

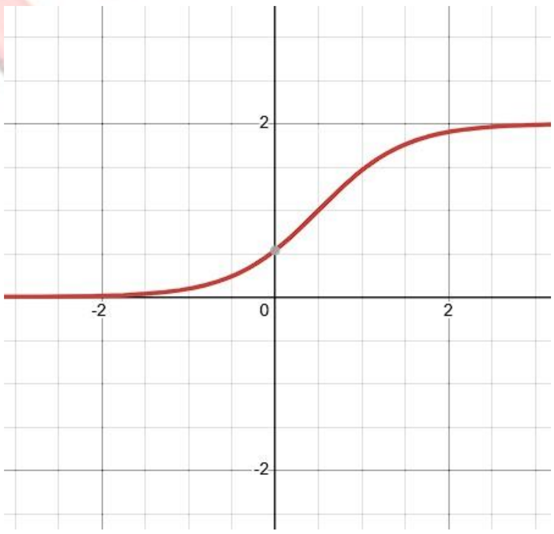
Άρα η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Β4. Είναι: $g(x) = e^{1-2x}\cdot f(x) = \frac{2e^{1-2x}}{1+e^{1-2x}} > 0$

Άρα το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_g τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=\frac{1}{2}$ προκύπτει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2e^{1-2x}}{1+e^{1-2x}}dx = \ldots.. = -\left[\ln\left(1+e^{1-2x}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \ldots. = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

Β5.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \neq 0$ είναι: $xf(x)+1=e^x \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x-1}{x}$

Αλλά η f είναι συνεχής στο $x \in R$ άρα: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=...=\frac{e^0}{1}=1$

Επομένως: $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 0$ με:

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)'x-x'(e^x-1)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=...=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}\in R$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x=0$ με $f'(0)=\frac{1}{2}$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{N}(0, f(0))$ θα έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1$$

Γ3. Είναι: $f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Θεωρώ: $\mathrm{A}(x)=xe^x-e^x+1$

Με $\mathrm{A}'(x)=xe^x+1\cdot e^x-e^x+0=xe^x$

Άρα η A(x) θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ οπότε θα ισχύει:

$\mathrm{A}(x)\geq \mathrm{A}(0)\Leftrightarrow xe^x-e^x+1\geq 0-e^0+1\Leftrightarrow xe^x-e^x+1\geq 0$

Επομένως θα είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

Γ4. Η συνάρτηση $g(x)=(x-2)^2\cdot\left(x\cdot\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2=(x-2)^2\cdot(e^x-1+1-e)^2=(x-2)^2\cdot(e^x-e)^2$

είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$g'(x)=2(x-2)\cdot(x-2)'\cdot(e^x-e)^2+2(x-2)^2\cdot(e^x-e)\cdot(e^x-e)'=2(x-2)\cdot(e^x-e)^2+2e^x(x-2)^2\cdot(e^x-e)$$

$$=2(x-2)\cdot(e^x-e)\cdot(e^x-e+(x-2)e^x)=....=2(x-2)\cdot(e^x-e)\cdot(xe^x-e^x-e)$$

Λύνω την εξίσωση: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ e^x-e=0 \Leftrightarrow e^x=e \Leftrightarrow x=1 \\ xe^x-e^x-e=0 \end{cases}$

Θεωρώ: $\mathrm{B}(x)=xe^x-e^x-e$

Με $\mathrm{B}'(x)=xe^x+e^x-e^x-0=xe^x>0$ για κάθε $x>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα

Παρατηρώ ότι: $\mathrm{B}(2)=2e^2-e^2-e=e^2-e>0$ και $\mathrm{B}(1)=e-e-e=-e<0$

Άρα η εξίσωση: $\mathrm{B}(x)=0 \Leftrightarrow xe^x-e^x-e=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(1,2)$

Από τον πίνακα προσήμων προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στα $(0,1]$, $[x_0,2]$

Και γνησίως αύξουσα στα $[1,x_0]$, $[2,+\infty)$

Επομένως θα παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στο $x_0\in(1,2)$ και δύο τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$

Γ5. Υπολογίζουμε χωριστά το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}[x\cdot \ln x]$ και χωριστά το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln(f(x))]$. Και τα δύο προκύπτουν μηδενικά οπότε και το ζητούμενο αρχικό όριο είναι ίσο με 0.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R^*$ για την οποία ισχύουν: $f(x)\cdot\ln(x+1)+e^{-x}\geq 1$, για κάθε $x>-1$ και $f'(x)-\dfrac{x}{|f(x)|}=0$, για κάθε $x\in R$.

Δ1. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x\in R$, θα είναι και συνεχής με $f(\mathrm{A})=R^*$ άρα $f(x)\neq 0$ οπότε η συνάρτηση θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $x\in R$, δηλαδή θα ισχύει μόνο $f(x)>0$ ή μόνο $f(x)<0$ για κάθε $x\in R$.

Θεωρώ συνάρτηση: $\phi(x)=f(x)\cdot\ln(x+1)+e^{-x}-1$ για κάθε $x\in R$ που είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\phi'(x)=f'(x)\cdot\ln(x+1)+f(x)\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)'+\left(-e^{-x}\right)-0=f'(x)\cdot\ln(x+1)+f(x)\cdot\frac{1}{x+1}-e^{-x}$$

Παρατηρώ ότι: $\phi(0)=f(0)\cdot\ln 1+e^0-1=0+1-1=0$

Οπότε η αρχική ανισότητα παίρνει τη μορφή $\phi(x)\geq 0 \Leftrightarrow \phi(x)\geq\phi(0)$, άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$. Επομένως βάση του θεωρήματος Fermat θα ισχύει:

$$\phi'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)\cdot 0+f(0)\cdot\frac{1}{0+1}-e^0=0 \Leftrightarrow f(0)=1$$

Επομένως η C_f θα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1.

Δ2. Αφού $f(0)=1$ και η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο, θα ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα θα είναι: $|f(x)|=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Οπότε η αρχική σχέση γίνεται:

$$f'(x)-\frac{x}{f(x)}=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x}{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)=x\Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x)=2x\Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'$$

Άρα: $f^2(x)=x^2+c$

Για $x=0$ βρίσκω $c=1$, επομένως θα είναι: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x\in R$

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $x\in R$, η C_f δεν παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Βρίσκουμε διαφορετική πλάγια ασύμπτωτη για την C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Δ4. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην συνάρτηση f για το θεωρητικό διάστημα $\left[\frac{x}{2},x\right]$ οπότε θα υπάρχει $\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\frac{2f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

Αλλά η f είναι κυρτή οπότε έχουμε:

$$\xi>\frac{x}{2}\Leftrightarrow f'(\xi)>f'\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{2f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}>f'\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow 2f(x)-2f\left(\frac{x}{2}\right)>xf'\left(\frac{x}{2}\right)$$

Δ5. Αφού η F είναι μια αρχική συνάρτηση της f , θα ισχύει: $F'(x)=f(x)$, για $x\geq 0$

Είναι: $F(x-1)-F(\ln x)=F(x+2)-F(3+\ln x)\Leftrightarrow F(3+\ln x)-F(\ln x)=F(x+2)-F(x-1)$

Θεωρώ συνάρτηση: $\mathrm{A}(x)=F(x+3)-F(x)$ για $x\geq 0$ που είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$\mathrm{A}'(x)=F'(x+3)\cdot(x+3)'-F'(x)=f(x+3)-f(x)$

Αλλά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε ισχύει $\mathrm{A}'(x)>0$ για $x\geq 0$, άρα και η Α(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως η εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή: $\mathrm{A}(\ln x)=A(x-1)\Leftrightarrow \ln x=x-1\Leftrightarrow \ln x+1-x=0$

Που γνωρίζουμε πως δίνει μοναδική λύση την $x=1$