

ΚΥΡΙΑΚΗ 29 ΜΑΡΤΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$ εσωτερικό του σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

9 Μονάδες

A2. Τι ονομάζεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow R$;

6 Μονάδες

A3. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και για κάποιο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

ii) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι το ολικό μέγιστο της.

iii) Είναι αδύνατο για μία παραγωγίσιμη $f : R \rightarrow R$ το σημείο της $x_0 \in R$ να είναι συγχρόνως και τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

iv) Αν η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ είναι κυρτή και 2 φορές παραγωγίσιμη στο R τότε ισχύει $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in R$.

v) Αν η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ είναι παραγωγίσιμη, τότε ανάμεσα σε 2 ρίζες της f' υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f .

10 Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $xf'(x) = \frac{1}{x} - f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 5 Μονάδες
- B2.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. 7 Μονάδες
- B3.** Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη καμπυλότητα. 5 Μονάδες
- B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . 4 Μονάδες
- B5.** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f 4 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με: $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. 5 Μονάδες
- Γ2.** Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0 = 0$ 4 Μονάδες

Γ3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

5 Μονάδες

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $xf'(x) < f(x) < \frac{x}{2}$ για κάθε $x > 0$.

6 Μονάδες

Γ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $2f(\xi) = (\xi - 1)\sqrt{e^\xi}$

5 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} \ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

7 Μονάδες

ii. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x^2+1)(x^2-5x+6)}{\ln(x^2+1)}$, με $x \in \mathbb{R}^*$ και ότι υπάρχουν αριθμοί

α, β με $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις: $e^{x^2-\beta^2}(x^2-5x+6) \leq \beta^2 - 5\beta + 6$, για κάθε $x > 1$ και $x^2 - 5x + 6 \geq e^{a^2-x^2}(a^2 - 5a + 6)$, για κάθε $0 < x < 1$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ έτσι ώστε να ισχύει: $g''(\xi) = 0$.

7 Μονάδες

Δ2. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $h: [2,4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h'(4) = h(4)$ και $h''(x) > 0$ για κάθε $x \in [2,4]$. Επίσης η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της $M(2, h(2))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = x - 1$.

i. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.

3 Μονάδες

ii. Να δείξετε ότι $h(4) > 3$.

3 Μονάδες

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h''(x) \cdot h(x) = (h'(x))^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,4)$

5 Μονάδες

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται ΜΟΝΟ για διαγράμματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1,5) ώρα μετά την έναρξη του διαγωνίσματος.

Καλή τύχη!

**Τα θέματα επιμελήθηκε ο καθηγητής
Φούντος Χρήστος**