

## Μαθηματικά Α' Λυκείου

21 Δεκεμβρίου 2025

Εξεταζόμενη ύλη: Κεφάλαια 2, 3

### Θέμα Α

**A1.** Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $a$  συμβολίζεται με  $|a|$  και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

**A2.** 1. Σ      2. Λ      3. Σ      4. Σ      5. Λ

### Θέμα Β

#### B1.

α)  $|\pi - 3| + |3 - \pi| = \pi - 3 - (3 - \pi) = \pi - 3 - 3 + \pi = 2\pi - 6$

β)  $|\sqrt{2} - 2| + |\sqrt{2} + 2| = -(\sqrt{2} - 2) + \sqrt{2} + 2 = 2 + 2 = 4$

γ)  $\sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{8})^2} = |\sqrt{7} - \sqrt{8}| = \sqrt{8} - \sqrt{7}$

#### B2.

α)  $|3x - 5| = |x + 3| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = x + 3 \Leftrightarrow 3x - x = 5 + 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4 \\ \text{ή} \\ 3x - 5 = -(x + 3) \Leftrightarrow 3x - 5 = -x - 3 \Leftrightarrow 3x + x = 5 - 3 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$

β) πρέπει να ισχύει ότι  $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$

και  $|5 - x| = 2x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x = 2x - 4 \Leftrightarrow -x - 2x = -5 - 4 \Leftrightarrow -3x = -9 \Leftrightarrow x = 3 \\ \text{ή} \\ 5 - x = -(2x - 4) \Leftrightarrow 5 - x = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x - x = 4 - 5 \Leftrightarrow x = -1 \text{ που απορρίπτ.} \end{cases}$

γ)  $x^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = 4$

#### B3.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  $2 \leq \alpha \leq 4$  και  $-4 \leq \beta \leq -3$ , να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών περιέχεται η τιμή των ακόλουθων παραστάσεων.

α)  $-4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow -8 \leq 2\beta \leq -6$  άρα  $\begin{cases} 2 \leq \alpha \leq 4 \\ -8 \leq 2\beta \leq -6 \end{cases} \xrightarrow{+} 2 - 8 \leq \alpha + 2\beta \leq 4 - 6 \Leftrightarrow -6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2$

$$\beta) -4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow 3 \leq -\beta \leq 4 \quad \text{\acute{a}\rho\alpha} \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq \alpha \leq 4 \\ 3 \leq -\beta \leq 4 \end{array} \right\}^+ \Rightarrow 2 + 3 \leq \alpha + (-\beta) \leq 4 + 4 \Leftrightarrow 5 \leq \alpha - \beta \leq 8$$

$$\gamma) -4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow 3 \leq -\beta \leq 4 \quad \text{\\acute{a}\rho\alpha} \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq \alpha \leq 4 \\ 3 \leq -\beta \leq 4 \end{array} \right\}^* \Rightarrow 2 \cdot 3 \leq \alpha \cdot (-\beta) \leq 4 \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq -\alpha\beta \leq 16 \stackrel{+1}{\Leftrightarrow} 7 \leq 1 - \alpha\beta \leq 17$$

## Θέμα Γ

### Γ1.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΕ:

$$\left. \begin{array}{l} AB = AG \text{ γιατί } ABG \text{ ισοσκελές} \\ BD = GE \text{ από υπόθεση} \\ A\hat{B}D = A\hat{G}E \text{ ως παραπληρωματικές γωνίες ίσων γωνιών} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πγπ} \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{BAΔ} = \text{ΓΑΕ} \\ \text{\acute{a}\rho\alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} B\hat{A}D = \text{Γ}\hat{A}E \\ \hat{D} = \hat{E} \\ A\mathbf{D} = \mathbf{A}E \text{ \acute{a}\rho\alpha } A\mathbf{D}E \text{ ισοσκ.} \end{array}$$

### Γ2.

α)

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta B = E\Gamma \text{ από υπόθεση} \\ BM = MG \text{ γιατί } M \text{ το μέσο της } B\Gamma \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ ως γωνίες βάσης ισοσκελούς} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πγπ} \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{M}\Delta\text{B} = \text{M}\text{E}\Gamma \\ \text{\acute{a}\rho\alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} B\hat{M}\Delta = \text{Γ}\hat{M}E \\ B\hat{\Delta}M = \text{M}\hat{E}\Gamma \\ \mathbf{M}\Delta = \mathbf{M}E \end{array}$$

β)

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΜΕ:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta M = ME \text{ από το } \alpha) \\ AM \text{ κοινή} \\ A\Delta = AE \text{ ως ίσα υπόλοιπα των ίσων πλευρών } AB = AG \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πγπ} \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{A}\Delta\text{M} = \text{A}M\text{E} \\ \text{\acute{a}\rho\alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta\hat{A}M = M\hat{A}E \\ A\hat{M}\Delta = A\hat{M}E \\ \mathbf{A}\hat{\Delta}M = \mathbf{A}\hat{E}M \end{array}$$

## Θέμα Δ

### Δ1.

α)

$$\text{πρέπει } x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5 \quad \text{και} \quad x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

β)

$$A = \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} + \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} = \frac{\sqrt{(x - 5)^2}}{x - 5} + \frac{\sqrt{(x + 2)^2}}{x + 2} = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x + 2|}{x + 2}$$

και ισχύει ότι:  $-2 < x < 5 \stackrel{-5}{\Leftrightarrow} -7 < x - 5 < 0$  και  $-2 < x < 5 \stackrel{+2}{\Leftrightarrow} 0 < x + 2 < 7$  άρα:

$$\frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{-(x-5)}{x-5} + \frac{x+2}{x+2} = -1 + 1 = 0$$

**Δ2.**

$$\frac{4}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x} \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)}$$

Πρέπει  $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$  και  $x \neq 0$  και ΕΚΠ( $x, x+2$ )= $x(x+2)$  άρα

$$x(x+2) \frac{4}{x+2} - x(x+2) \frac{2}{x} = x(x+2) \frac{x-4}{x(x+2)} \Leftrightarrow 4x - 2(x+2) = x - 4 \Leftrightarrow 4x - 2x - 4 = x - 4$$

$$\Leftrightarrow 2x - x = 4 - 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ που απορρίπτεται}$$

**Δ3.**

Ισχύει ότι  $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Και  $|y| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 3$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις παίρνουμε:

$$-2 + (-3) \leq x + y \leq 2 + 3 \Leftrightarrow -5 \leq x + y \leq 5 \text{ δηλαδή } |x + y| \leq 5$$