ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο Δ τότε θα ισχύει: $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

(Μονάδες 6)

Α2. Να διατυπωθεί το θεώρημα Rolle καθώς και η γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 4)

Α3. Να οριστεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ):

1. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια στο R, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$
2. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.
3. Ισχύει ότι $\left(\eta\mu 2x\right)' = \sigma\upsilon\nu 2x$
4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[-2\cdot f(x)]=+\infty$.
5. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο D_f και ισχύει το θεώρημα Rolle σε ένα υποδιάστημα του D_f τότε η f αποκλείεται να είναι "1-1".
6. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R και έχει 2 ρίζες, τότε η f' θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα.
7. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, τότε ισχύει: $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g'(x)$
8. Αν μια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση της f σε μοναδικό σημείο Α, τότε η ευθεία αυτή εφάπτεται της C_f στο Α.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}+\lambda & ,x>1 \\ x^3-x^2+3 & ,x\le 1 \end{cases}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

(Μονάδες 4)

Β2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

(Μονάδες 8)

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,6)$.

(Μονάδες 8)

Β4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(4,9)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): 5x+2y-6=0$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R\to R^*$ τέτοια ώστε να ισχύει: $f^2(x)=2xf(x)+1$, για κάθε $x\in R$.

Γ1. Αν $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$

(Μονάδες 7)

Γ2. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(Μονάδες 4)

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $xf\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)+x=1$, για κάθε $x\neq 0$.

(Μονάδες 4)

Γ4. Να δείξετε ότι: $f''(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$, για κάθε $x\in R$.

(Μονάδες 6)

Γ5. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): x-y-1=0$

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει ότι:
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1}=-2$ και $f^2(x)+f(x^2)=2x^2$, για κάθε $x\in R$ τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι: $f(2)=-5$ και $f(1)=-1$

(Μονάδες 10)

Δ2. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(\pi)x^5+2018x^3-e}{x^2+2019x+e}$

(Μονάδες 3)

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x-(x-3)f'(x)$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(1,2)$.

(Μονάδες 7)

Καλή τύχη!

Τα θέματα επιμελήθηκε ο καθηγητής ***Φούντος Χρήστος***