

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 111

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 128

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 96

A4.

1. Σ
2. Λ.
3. Λ
4. Σ
5. Σ
6. Σ
7. Λ
8. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνέχειας στο $x_0 = 1$.

B2. Ελέγχουμε την ισότητα των πλευρικών ορίων της παραγώγου της συνάρτησης στο $x_0 = 1$.

B3. Γράφουμε την θεωρητική εξίσωση εφαπτόμενης της C_f $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ αντικαθιστώντας τα $f(x_0), f'(x_0)$ με τους τύπους τους και τα x, y με τις συντεταγμένες του σημείου $A(0,6)$. Έτσι βρίσκουμε το ζητούμενο x_0 και μετέπειτα καθορίζουμε την εξίσωση εφαπτομένης.

B4. Δείχνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (4,9)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2}{5} \text{ με θεώρημα Rolle για την συνάρτηση } h(x) = f(x) - \frac{2}{5}x$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μετατρέπουμε τη δοθείσα σχέση σε μορφή $(f(x) - x)^2 = 1 + x^2$ και χρησιμοποιώ την ιδιότητα διατήρησης σταθερού πρόσημου της ζητούμενης συνάρτησης για να καθορίσω τις πιθανές

μορφές της και μετά την τιμή $f(0)=1$ για να απορρίψω τη μια και να δείξω ότι:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} + x$$

Γ2. Εφαρμόζουμε την μέθοδο πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με τη συζυγή παράσταση και το όριο προκύπτει μηδενικό

Γ3. Θέτουμε στον τύπο της συνάρτησης όπου x το $\frac{1}{x}$ για να βρούμε τη μορφή της $f\left(\frac{1}{x}\right)$ και παίρνουμε το πρώτο μέλος της ζητούμενης σχέσης και με αντικατάσταση όλων των τύπων την αποδεικνύουμε.

Γ4. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση και μετά βρίσκουμε και την δεύτερη παράγωγο της

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Γ5. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x_0)=1$ για να βρούμε το ζητούμενο σημείο επαφής και μετά καθορίζουμε την ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να δείξουμε ότι $f(2) = -5$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο της βοηθητικής συνάρτησης στην συνάρτηση f και για το $f(1) = -1$ θέτουμε στην αρχική σχέση $x = 1$ καταλήγοντας σε εξίσωση που λύνεται με σχήμα Horner.

Δ2. Κρατάμε μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους σε αριθμητή και παρονομαστή και χρησιμοποιούμε την θεωρία του σταθερού προσήμου συνάρτησης για να καθορίσουμε ότι $f(\pi) < 0$ άρα το όριο κάνει τελικά $-\infty$

Δ3. Αφού εξηγήσουμε πως όλα τα μέρη της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, παραγωγίζουμε κατά μέλη την αρχική σχέση παίρνοντας την $f(x) \cdot f'(x) + xf'(x^2) = 2x$. Θέτουμε $x = 1$ για να βρούμε το $f'(1)$ και καθορίζουμε μετά και την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Δ4. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στην συνάρτηση $h(x) = (x-3)f(x) - x^2$ στο $(1,2)$.