

ΚΥΡΙΑΚΗ 14 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in \Delta$ τότε θα είναι και συνεχής.

7 Μονάδες

A2. Πότε μια συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in \Delta$;

3 Μονάδες

A3. Να διατυπωθεί το θεώρημα Ελάχιστης και Μέγιστης Τιμής για μια συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$

3 Μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(\beta), f(\alpha)]$

ii) Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο Δ , τότε δεν θα είναι ούτε συνεχής στο Δ .

iii) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ θα είναι συνεχής στο x_0 .

iv) Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει ότι $f(\beta) > 0$.

v) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0$, τότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

vi) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε μεταξύ δύο ριζών της f , η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο.

vii) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα που δεν είναι κλειστό, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο διάστημα αυτό.

viii) Το πεδίο ορισμού της f' μπορεί να είναι υπερσύνολο του πεδίου ορισμού της f .

12 Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$

- B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$
7 Μονάδες
- B2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$
4 Μονάδες
- B3. Αν για την $g : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^{-1}(g(x)) = \frac{x+2}{x+3}$, να βρείτε τον τύπο της g .
4 Μονάδες
- B4. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(g(x^2 - x - 3) + \frac{1}{2}\right) = 0$
5 Μονάδες
- B5. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f^{-1}(x) \cdot \eta\mu x]$
5 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1} = 4$.

- Γ1. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$
8 Μονάδες
- Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(\xi) = \xi e^\xi + \xi^2$
7 Μονάδες
- Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(\pi) \cdot x^3 - x^2 + 3x + 2015]$
3 Μονάδες

Γ4. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

7 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{5-2x}{2-x}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(x^2) + xf(x-1) + x^{20} + 2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y = x - 1$.

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_g που διέρχεται από το σημείο $B(2,4)$

7 Μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$, έχει εξίσωση $(\varepsilon_2): y = -5x + 4$

9 Μονάδες

Δ3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x) + e^{x-1} + 3 \ln x - 2\sqrt{2-x}$ έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο της $\Gamma(1, h(1))$

4 Μονάδες

Δ4. Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h τέμνει μοναδική φορά τον άξονα $x'x$ στο $(1,2)$

5 Μονάδες

Καλή τύχη!

Τα θέματα επιμελήθηκε ο καθηγητής

Φούντος Χρήστος