

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

**Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου
2 Νοεμβρίου 2025**

Εξεταζόμενη ύλη: Κεφάλαιο 1 παράγραφοι 1.1-1.5

Θέμα Α

A1. Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

A2. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

A3. 1) Σ 2) Λ 3) Σ 4) Λ 5) Λ

Θέμα Β

B1. α) τίποτα από τα δύο

β) πολυώνυμο βαθμού 7

γ) $x^2y + 4x^2y - 2x^2y = 3x^2y$ άρα είναι μονώνυμο βαθμού 3

δ) είναι σταθερό μονώνυμο (ή πολυώνυμο) άρα έχει βαθμό 0

B2. α) $-3x(x^3y - 4x) = -3x^4y + 12x^2$

β) $2y^2(1 - x) - (x^2y - 2xy^2) = 2y^2 - 2y^2x - x^2y + 2xy^2 = 2y^2 - x^2y$

γ) $(4x - y)(2x^2z - xy^3 + 1) = 8x^3y - 4x^2y^3 + 4x - 2x^2zy + xy^4 - y$

B3. α) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

β) $(z^2 - 2x^3)^2 = (z^2)^2 - 2 \cdot z^2 \cdot 2x^3 + (2x^3)^2 = z^4 - 4z^2x^3 + 4x^6$

γ) $(x^2 - xy)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot xy + (xy)^2 = x^4 - 2x^3y + x^2y^2$

Θέμα Γ

Γ1.

α) $A(x) = P(x) + Q(x) = 3x^2 + 2x + 1 - x^3 = -x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ άρα

$A(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = -8 + 12 + 4 + 1 = 9$

$$\beta) B(x) = P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 + 2x) \cdot (1 - x^3) = 3x^2 - 3x^5 + 2x - 2x^4 = -3x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 2x$$

$$\text{άρα } B(-1) = -3 \cdot (-1)^5 - 2 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = +3 - 2 + 3 - 2 = 2$$

$$\Gamma 2. \alpha) (x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$\beta) (1 - x)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot x^2 - x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

$$\gamma) (2\alpha - 5\beta)^3 = (2\alpha)^3 - 3 \cdot (2\alpha)^2 \cdot 5\beta + 3 \cdot 2\alpha \cdot (5\beta)^2 - (5\beta)^3 = 8\alpha^3 - 60\alpha^2\beta + 150\alpha\beta^2 - 125\beta^3$$

Γ3. Για να είναι ίσα αρκεί οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι, οπότε:

$$a = 3 \quad \text{και} \quad \beta + 1 = 4 \Leftrightarrow \beta = 3 \quad \text{και} \quad 2\gamma = 10 \Leftrightarrow \gamma = 5$$

Θέμα Δ

Δ1.

$$\alpha) P(0) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad \text{και} \quad Q(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad \text{άρα} \quad P(0) + Q(0) = -2$$

$$\beta) A(x) = (4x^2 + 2x - 1)(2x - 1) = 8x^3 + 4x^2 - 2x - 4x^2 - 2x + 1 = 8x^3 - 4x + 1$$

$$\gamma) Q(P(x)) = Q(4x^2 + 2x - 1) = 2(4x^2 + 2x - 1) - 1 = 8x^2 + 4x - 2 - 1 = 8x^2 + 4x - 3$$

Δ2.

Θα ξεκινήσουμε από το αριστερό μέλος και με πράξεις θα καταλήξουμε στο δεξιό:

$$4a(a - 1) - (2a - 1)^2 = 4a^2 - 4a - (4a^2 - 4a + 1) = 4a^2 - 4a - 4a^2 + 4a - 1 = -1$$

Δ3.

$$P(x) = (x^2 - 1)^3 - x^2(x^2 + 1)^2 - x^2(2 - 5x^2)$$

$$= (x^2)^3 - 3 \cdot (x^2)^2 \cdot 1 + 3 \cdot x^2 \cdot 1^2 - 1^3 - x^2(x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 + 5x^4$$

$$= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 - x^6 - 2x^4 - x^2 - 2x^2 + 5x^4$$

$$= -1 \quad \text{άρα είναι σταθερό πολυώνυμο}$$

Bonus:

$$\text{Αρκεί να παρατηρήσετε με πράξεις ότι: } (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} \quad \text{και} \quad (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\text{Οπότε ο αριθμός γίνεται: } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής:

Τζιώρτζης Αλέξανδρος