

**Απαντήσεις: Μαθηματικά Γ' Λυκείου Επαλ
03 Ιουνίου 2025
Πανελλήνιες**

Θέμα Α

A1) Βλέπε θεωρία

A2) Βλέπε θεωρία

A3) Σωστό-Λάθος:

- a. Λ
- b. Σ
- c. Σ
- d. Σ
- e. Λ

A4) α.0 β.2χ

...

Θέμα Β

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

B1) Για να συμπληρώσουμε τον πίνακα θα κάνουμε τους εξής υπολογισμούς:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Rightarrow v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Rightarrow v_1 + 40 = 50 \Rightarrow v_1 = 50 - 40 \Rightarrow v_1 = 10 = N_1$$

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} * 100 = \frac{10}{50} * 100 = \frac{1}{5} * 100 = 0,2 * 100 = 20\%$$

$$f_2\% = \frac{v_2}{v} * 100 = \frac{15}{50} * 100 = \frac{3}{10} * 100 = 0,3 * 100 = 30\%$$

$$f_3\% = \frac{v_3}{v} * 100 = \frac{11}{50} * 100 = 0,22 * 100 = 22\%$$

$$f_4\% = \frac{v_4}{v} * 100 = \frac{8}{50} * 100 = \frac{4}{25} * 100 = 0,16 * 100 = 16\%$$

$$f_5\% = \frac{v_5}{v} * 100 = \frac{6}{50} * 100 = \frac{3}{25} * 100 = 0,12 * 100 = 12\%$$

$$N_2 = v_1 + N_1 = 15 + 10 = 25$$

$$N_3 = v_3 + N_2 = 11 + 25 = 36$$

$$N_4 = v_4 + N_3 = 8 + 36 = 44$$

B2)

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$x_i v_i$
0	10	20	10	0
1	15	30	25	15
2	11	22	36	22
3	8	16	44	24
4	6	12	50	24
Σύνολο	50	100		85

$$x_1 v_1 = x_1 * v_1 = 0 * 10 = 0$$

$$x_2 v_2 = x_2 * v_2 = 1 * 15 = 15$$

$$x_3 v_3 = x_3 * v_3 = 2 * 11 = 22$$

$$x_4 v_4 = x_4 * v_4 = 3 * 8 = 24$$

$$x_5 v_5 = x_5 * v_5 = 4 * 6 = 24$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{85}{50} = 1.7$$

B3) Αφού $n=50$ άρτιο πλήθος συνόλου τότε η διάμεσος δίνεται από το τύπο

$$\delta = \frac{\frac{t_v}{2} + \frac{t_{v+1}}{2}}{2} = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

B4) α) $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20\% + 30\% + 22\% + 16\% = 88\%$ των υπαλλήλων εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες

β) έστω y_i οι νέες παρατηρήσεις και x_i οι αρχικές παρατηρήσεις, τότε θα έχουμε

$$y_i = x_i + 4 \text{ για } i=1, \dots, 50$$

$$\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1.7 + 4 = 5.7$$

...

Θέμα Γ

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + a, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -2 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x = -6x^2 + 12x$$

$$\mathbf{\Gamma 1)} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow -6x(x-2) = 0 \Rightarrow -6x = 0 \text{ ή } x-2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'(x)	-	●	●	-
f(x)				

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Και είναι γνησίως αύξουσα για $x \in [0, 2]$

$$\mathbf{\Gamma 2)} \quad \text{Η f παρουσιάζει για } x=0 \text{ τοπικό ελάχιστο με τιμή } f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + a = 0 + 0 + a = a$$

$$\text{Η f παρουσιάζει για } x=2 \text{ τοπικό μέγιστο για } x=2 \text{ με τιμή } f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + a = -2 \cdot 8 + 6 \cdot 4 + a = -16 + 24 + a = a + 8$$

$$\text{Το ημίαθροισμα των ακροτάτων } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Rightarrow \frac{a + a + 8}{2} = -8 \Rightarrow 2a + 8 = -16 \Rightarrow 2a = -24 \Rightarrow a = -12$$

$$\text{Άρα } f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$$

$$\mathbf{\Gamma 3)} \quad f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 12 = -2 + 6 - 12 = -8$$

Το σημείο επαφής της εφαπτομένης είναι το M (1, -8)

$$\text{Τύπος εφαπτομένης της } C_f \text{ στο M είναι ε: } y = \lambda x + b \Rightarrow y = f'(x_0)x + b \Rightarrow y = f'(1)x + b$$

$$f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = -6 \cdot 1 + 12 = -6 + 12 = 6$$

$y = 6x + b$. Ξέρω ότι το M ανήκει στην ε. Άρα θα αντικαταστήσω όπου x, y τις συντεταγμένες και θα έχω $-8 = 6 \cdot 1 + b \Rightarrow -8 = 6 + b \Rightarrow b = -14$ άρα ο τύπος της εφαπτομένης θα είναι $\varepsilon: y = 6x - 14$

$$\mathbf{\Gamma 4)} \quad \text{Για } x \geq 2 \text{ Η f είναι φθίνουσα } \Rightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow$$

$$-2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow (\text{διαίρω με το } -2 \text{ και αλλάζω τη φορά της ανίσωσης}) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

...

Θέμα Δ

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3} \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \lambda \cdot 2 \cdot x + 7 \cdot 1 + 0 = x^2 + 2\lambda x + 7$$

$$\Delta 1) \text{ Για } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 1^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$$

$$F'(x) = x^2 - 8x + 7$$

$$\Delta 2) f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36$$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow \chi_1 = 1 \text{ ή } \chi_2 = 7$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$	+	●	●	+
$f(x)$				

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in [1, 7]$

Και είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (-\infty, 1] \cup [7, +\infty)$

$\Delta 3)$ Για να μελετήσουμε το πρόσημο της παράστασης A πρέπει να συγκρίνουμε τις τιμές $f(2025), f(2020), f(\frac{3}{2}), f(\frac{5}{2})$

$2020, 2025 \in (7, \infty)$ όπου η f είναι αύξουσα άρα για $2020 < 2025 \Rightarrow f(2020) < f(2025) \Rightarrow f(2025) - f(2020) > 0$

$\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7]$ όπου η f είναι φθίνουσα άρα για

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

$$\text{Άρα } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f(\frac{3}{2}) - f(\frac{5}{2})} > 0$$

$$\Delta 4) f''(x) = 2x - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = *$$

$$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8) \text{ γιατί :}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 * 1 * 16 = 100 - 64 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 * 1} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow x = 8 \text{ ή } x = 2$$

$$\text{Άρα η * θα γίνει } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{3}^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}) =$$

$$(2-8)(\sqrt{2+1}+\sqrt{3}) = -6 * 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$

...

Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής:

Γεωργιάδης Αθανάσιος