

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
2 Ιουνίου 2025
Πανελλήνιες Εξετάσεις

ΘΕΜΑ Α

- A1. Βλέπε σελίδα 186 σχολικού βιβλίου
A2. Βλέπε σελίδα 76 σχολικού βιβλίου
A3. Βλέπε σελίδα 161 σχολικού βιβλίου
A4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

Επειδή στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ακρότατο, στο $x_0 = 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f , από θεώρημα Fermat προκύπτει ότι
 $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -6$

B2.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \text{ και } f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [1, 3]$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στα } (-\infty, 1] \text{ και } [3, +\infty)$$

$$\Delta_1 = (-\infty, 1] , \Delta_2 = (1, 3) , \Delta_3 = [3, +\infty)$$

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right) = (-\infty, 1]$$

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-3, 1)$$

$$f(\Delta_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty)$$

$0 \in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο Δ_1 η οποία είναι μοναδική στο Δ_1 αφού σε αυτό η f είναι γνησίως μονότονη.

Επειδή f συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0)f(1) = -3 < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$, άρα η ρίζα στο Δ_1 ανήκει ειδικότερα στο $(0, 1)$

$0 \in f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο Δ_2 η οποία είναι μοναδική στο Δ_2 αφού σε αυτό η f είναι γνησίως μονότονη.

$0 \in f(\Delta_3)$ άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο Δ_3 η οποία είναι μοναδική στο Δ_3 αφού σε αυτό η f είναι γνησίως μονότονη.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις θετικές ρίζες.

B3.

Η f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή στο } [2, +\infty)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ άρα η } f \text{ είναι κοίλη στο } (-\infty, 2]$$

Στο 2 η f έχει εφαπτομένη και $f(2) = -1$ άρα το $(2, -1)$ είναι σημείο καμπής.

B4.

Η g παραγωγίσιμη με $g'(x) = 1 + f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο $y = f(\xi) - \xi f'(\xi) = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση $y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο $y = g(\xi) - \xi g'(\xi) = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

Επομένως οι εφαπτομένες τέμνουν τον $y'y$ στο ίδιο σημείο, άρα τέμνονται πάνω στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = e^0 \cdot 0 = 0$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

Αφού $l_1 = l_2 = 0$ τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Επίσης $f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0.

$$l_3 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$l_4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2.

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \frac{1}{x} \eta \mu x \right) = 0 \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ και}$$

$$|\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| |\eta \mu x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \eta \mu x \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ και από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \eta \mu x \right) = 0$$

$$\beta_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda_1 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0 \text{ διότι}$$

$$|\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow |e^x| |\eta \mu x| \leq |e^x| \Leftrightarrow -|e^x| \leq e^x \eta \mu x \leq |e^x|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-|e^x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |e^x| = 0 \text{ και από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$$

Επομένως η $y = \lambda_1 x + \beta_1 \Leftrightarrow y = 0$ δηλαδή ο x 'ς η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\lambda_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + 0 = 1$$

$$\beta_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda_2 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

Επομένως η $y = \lambda_2 x + \beta_2 \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}$ η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ3.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα ξ στο $(-n, 0)$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Θέτω } \varphi(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}, \quad x \in [-n, 0]$$

Η φ είναι συνεχής στο $[-n, 0]$ ως πράξεις συνεχών και

$$\varphi(-n) = f(-n) + n - \frac{1}{2} = -e^{-n} \eta \mu n + n - \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2} > 0$$

$$\varphi(0) = f(0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Δηλαδή $\varphi(-n)\varphi(0) < 0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα ξ στο $(-n, 0)$

$$\text{της εξίσωσης } \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$$

Γ4.

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + x}, \quad x \geq 0 \quad \text{δηλαδή } y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

$$\text{Παραγωγίζοντας κατά μέλη προκύπτει ότι } y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \quad (1)$$

Έστω ότι υπάρχει $t_0 \geq 0$ τέτοιος ώστε $x'(t_0) = y'(t_0)$

$$(1) \Leftrightarrow y'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \stackrel{y'(t_0)=x'(t_0) \geq 0}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \Leftrightarrow 1 = 0$$

Αδύνατο, άρα δεν υπάρχει $t_0 \geq 0$ τέτοιος ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης να είναι ίδιος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η F συνεχής και παραγωγίσιμη ως παράγουσα της f με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$

$$xf(x) = 2F(x)\ln x \quad (1)$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$, άρα θα έχουν ίδιες κλίσεις δηλαδή θα ισχύει ότι $f'(1) = 2$

Η g συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x)(e^{\ln^2 x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x)2\frac{\ln x}{x}e^{\ln^2 x}}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{xf(x)x^{\ln x} - 2F(x)\ln x e^{\ln^2 x}}{x(x^{\ln x})^2} \stackrel{(1)}{=} 0 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$

Δ2.

I

$$(1) \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = 2 \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{DLH} \frac{1}{x} = 1$$

II

$$\text{Για } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \text{ έχουμε } (1) \Leftrightarrow F(x) = \frac{xf(x)}{2 \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ και } F \text{ συνεχής στο } 1 \text{ άρα } F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1$$

Ισχύει $g(x) = c$ για κάθε $x > 0$ με $c \in \mathbb{R}$

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow \frac{x=1 F(1)}{1} = c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Επομένως } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$$

Δ3.

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = \frac{2 \ln x e^{\ln^2 x}}{x}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ άρα η } F \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty)$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ άρα η } F \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, 1]$$

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow} F(1^2) = F(1) - (1-1)^2 \Leftrightarrow F(1) = F(1) \text{ που ισχύει άρα η } x = 1 \text{ είναι μια προφανή ρίζα της εξίσωσης}$$

$$\text{Για } x \in (0, 1), x^2 < x \stackrel{F \searrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \text{ και } -(x-1)^2 < 0$$

$$\text{Άρα η εξίσωση } F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \text{ είναι αδύνατη στο } (0, 1)$$

$$\text{Για } x \in (1, +\infty), x^2 > x \stackrel{F \nearrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \text{ και } -(x-1)^2 < 0$$

$$\text{Άρα η εξίσωση } F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \text{ είναι αδύνατη στο } (1, +\infty)$$

Επομένως η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

Δ4.

Λόγω του ολικού ελαχίστου της F ισχύει ότι $F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 1$ άρα η F είναι θετική

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx$$

Ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Τότε όπου x το $\ln^2 x$ και προκύπτει $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \Leftrightarrow x^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \Leftrightarrow F(x) \geq \ln^2 x + 1$

$$\text{Άρα και } \int_1^e F(x) dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x (\ln^2 x)' dx = e - \int_1^e 2 \ln x dx = \\ &= e - \int_1^e (2x)' \ln x dx = e - \left([2x \ln x]_1^e - \int_1^e 2x (\ln x)' dx \right) = e - 2e + \int_1^e 2 dx = \\ &= -e + [2x]_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_1^e 1 dx = [x]_1^e = e - 1$$

$$\text{Οπότε } \int_1^e F(x) dx > e - 2 + e - 1 \Leftrightarrow E > 2e - 3$$

Τις λύσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής:
Γκουρτζούνης Ανδρέας