Απαντήσεις: Μαθηματικά Γ' Λυκείου
4 Ιουνίου 2024
Πανελλήνιες εξετάσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Βλέπε σελίδα 76 σχολικού βιβλίου

Α2.

Βλέπε σελίδα 155 σχολικού βιβλίου

Α3.

Βλέπε σελίδα 216 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = A_g \cap A_h - \{x / h(x) = 0\} = [1,+\infty) - \{1\} = (1,+\infty)$

$$f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x+1)}{\frac{1}{\sqrt{x}}(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Το πεδίο ορισμού της r είναι $A_r = A_g \cap A_h = [1,+\infty)$

$$r(x) = (gh)(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$$

Β2.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$ για κάθε $x > 1$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ και ως γνησίως μονότονη είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή το $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Δηλαδή $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ επομένως $f = f^{-1}$

Β3.

Η r δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη λόγω του πεδίου ορισμού της.

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(r(x) - \lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \overset{-\frac{1}{+\infty}}{=} = 0$$

Άρα η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$ η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της r στο $+\infty$

Β4.

Για $x > 1$,

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 + \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Όμως $x > 1$ άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $x = 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f είναι συνχής στο 2 άρα

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-}\left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(-x^2 + 4x - 3 + \lambda\right) \Leftrightarrow e^{\lambda} = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Αφού ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Γ2.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+5, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3, & x\ge 2\end{cases}$$

Για $x\in(0,2)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

Για $x\in(2,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2x+4<0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$

Και επειδή η f είναι συνεχής προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Για $x=0$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο με τιμή $f(0)=5$

Γ3.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-2)=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-(x-2))=0$$

Επειδή τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$,άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2, επομένως δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$, συνεπώς δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,3]$

Η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0))$ και $E(3,f(3))$ έχει κλιση

$\kappa=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{0-5}{3}=-\frac{5}{3}$ και $f'(\xi)$ η κλίση εφαπτομένης της C_f στο $\Gamma(\xi,f(\xi))$

Για να είναι παράλληλη η εφαπτομένη με την ευθεία ε πρέπει $f'(\xi)=-\frac{5}{3}$

Για $x\in(0,2)$, $f'(x)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2=-\frac{5}{3}$ αδύνατη

Για $x\in(2,3)$, $f'(x)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\in(2,3)$

Άρα υπάρχει $\xi=\frac{17}{3}\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Γ , να είναι παράλληλη στο στην ευθεία ε.

Γ4.

Έστω $M(x(t),y(t))$

$x'(t)=0$ αφού δεν μεταβάλλεται η τετμημένη και $x(t)=2$

$u(t)=0,5 \Leftrightarrow y'(t)=0,5$ αφού αυξάνεται η τεταγμένη με ρυθμό 0,5

Επειδή το Μ κινείται στην $x=2$ και έστω t_0 η χρονική στιγμή όπου το Μ θα συναντήσει την C_f , τότε $x(t_0)=2$ και $y(t_0)=1$ διότι $(2,1)$ το μοναδικό σημείο της C_f με τετμημένη 2.

$\varepsilon\varphi\omega(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ την οποία την παραγωγίζω κατά μέλη και προκύπτει

$$\frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}=\frac{0,5\cdot 2-y(t)\cdot 0}{2^2}=\frac{1}{4}$$

Άρα $\omega'(t)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}{4}$

$\sigma\upsilon\nu\omega(t)=\dfrac{x(t)}{d(t)}$ όπου $d(t)=OM=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ και

$$\sigma\upsilon\nu\omega(t_0)=\frac{x(t_0)}{d(t_0)}=\frac{x(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{2}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\omega'(t_0)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)}{4}=\frac{\frac{4}{5}}{4}=\frac{1}{5}\text{rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x-(\ln x+ax)}{x^2}=\frac{1+ax-\ln x-ax}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<e$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$

Έστω $\Delta_1 = (0,e)$ και $\Delta_2 = [e,+\infty)$

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to e^-} f(x)\right) = \left(-\infty, a + \frac{1}{e}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + ax}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + a\right) \overset{-\infty+a}{=} -\infty \quad \text{διότι} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{-\infty(+\infty)}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{\ln x + ax}{x} = \frac{1+ae}{e} = \frac{1}{e} + a$$

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right] = \left(a, \frac{1}{e} + a\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + a\right) = 0 + a = a \quad \text{διότι} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \overset{\frac{1}{+\infty}}{=} 0$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f((0,+\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(-\infty, a + \frac{1}{e}\right] = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$

Άρα $a + \frac{1}{e} = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = 1$

Δ2.

Για $a = 1$

$f(\Delta_1) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right)$ και $f(\Delta_2) = \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right]$

$0 \in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο Δ_1 η οποία είναι μοναδική στο Δ_1 αφού σε αυτό η f είναι γνησίως μονότονη.

$0 \notin f(\Delta_2)$ άρα δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο Δ_2 η οποία είναι μοναδική στο Δ_2 αφού σε αυτό η f είναι γνησίως μονότονη.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-2\ln 2+1=\ln\frac{1}{4}+\ln e=\ln\frac{e}{4}<0 \text{ αφού } \frac{e}{4}<1$$

$f(1)=\frac{\ln 1+1}{1}=1>0$ άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$

Δ3.

$f(4)=\frac{\ln 4+4}{4}=\frac{2\ln 2+4}{4}=\frac{\ln 2+2}{2}$ και $f(2)=\frac{\ln 2+2}{2}$ δηλαδή $f(4)=f(2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=f(2)$ έχει δύο προφανείς ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$

Η ρίζα $x_1=2$ ανήκει στο Δ_1 στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη, άρα η ρίζα $x_1=2$ της εξίσωσης $f(x)=f(4)$ είναι μοναδική στο Δ_1

Η ρίζα $x_2=4$ ανήκει στο Δ_2 στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη, άρα η ρίζα $x_2=4$ της εξίσωσης $f(x)=f(4)$ είναι μοναδική στο Δ_2

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$

Για $x>0$

$$2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1\le\frac{\ln x}{x}+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2+2}{2}\le\frac{\ln x+x}{x}\Leftrightarrow f(2)\le f(x)$$

$f(x)\ge f(2)=f(4)$

Για $x\in(0,e]$, $f(x)\ge f(2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x\ge 2$, όμως $x\in(0,e]$ άρα $x\in[2,e]$

Για $x\in[e,+\infty)$, $f(x)\ge f(4)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x\le 4$, όμως $x\in[e,+\infty)$ άρα $x\in[e,4]$

Άρα $2^x\le x^2\Leftrightarrow x\in[2,e]\cup[e,4]=[2,4]$

Δ4.

Το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^{x}\right)\frac{1-x}{e^{x}}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^{x}\right)\right|\frac{1-x}{e^{x}}dx\overset{u=e^{x}}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|\frac{1-\ln u}{u^{2}}du=$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|f'(u)du=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}|f(u)|f'(u)du+\int_{x_0}^{1}|f(u)|f'(u)du$$

Όπου x_0 η μοναδική ρίζα της f από Δ2 ερώτημα.

Για $x\in\left[\frac{1}{2},x_0\right]$, $x\le x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)\le f(x_0)\Leftrightarrow f(x)\le 0$

Για $x\in\left[x_0,1\right]$, $x\ge x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(x_0)\Leftrightarrow f(x)\ge 0$

Άρα

$$E(\Omega)=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(u)f'(u)du+\int_{x_0}^{1}f(u)f'(u)du=-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}=$$

$$-\left(\frac{f^2(x_0)}{2}-\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right)+\left(\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}\right)\overset{f(x_0)=0}{=}\frac{(-2\ln 2+1)^2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1-4\ln 2+4\ln^2 2}{2}=$$

$$\frac{4\ln^2 2-4\ln 2+2}{2}=2\ln^2 2-2\ln 2+1=\ln^2 2+(\ln 2-1)^2$$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής:

Γκουρτζούνης Ανδρέας