Απαντήσεις: Μαθηματικά
Πανελλήνιες εξετάσεις
6 Ιουνίου 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου

Α2.

Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου

Α3.

Σελίδα 128 σχολικού βιβλίου

Α4.

α Λάθος, β Λάθος, γ Λάθος, δ Σωστό, ε Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g = \mathbb{R}$ αφού $e^x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Το πεδίο ορισμού της $f = g \circ h$ είναι $A_f = \{x \in A_h \,/\, h(x) \in A_g\} = \{x > 0 \,/\, \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2.

i

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{(4 - x^2)' x - (4 - x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x^2 + x^2 - 4}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0$$ για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii

$$\pi > e \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \overset{\pi\cdot e>0}{\Leftrightarrow} e\left(4-\pi^2\right) < \pi\left(4-e^2\right) \overset{e>0}{\Leftrightarrow}$$

$$4-\pi^2 < \frac{\pi\left(4-e^2\right)}{e} \overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$$

B3.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} \overset{\frac{4}{0^+}}{=} +\infty$ άρα η $x=0$ $(y'y)$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (-1) = -1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} \overset{\frac{4}{+\infty}}{=} 0$$

Επομένως η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = -x$ η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

B4.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x} \overset{\frac{1}{-\infty}}{=} 0$$

Ισχύει ότι

$$\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow$$

$$-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0$ επομένως από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(3+\frac{9\alpha}{2}\right)-(2+2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Γ2.

i

$$f(1) = \frac{1}{1}+0 = 1$$

$$l_1 = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x-2) = 1-2 = -1$$

$$l_2 = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x} = -1$$

Αφού $l_1 = l_2 = -1$ τότε $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = -1$ επομένως ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

ii

Η παραπάνω εφαπτομένη έχει εξίσωση
$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x+2$ η οποία έχει κλίση $\lambda = -1$ και ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \lambda \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x'x.

Γ3.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x-3 < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$ και συνεχής στο $(-\infty,1]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως ρητή με $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ και συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

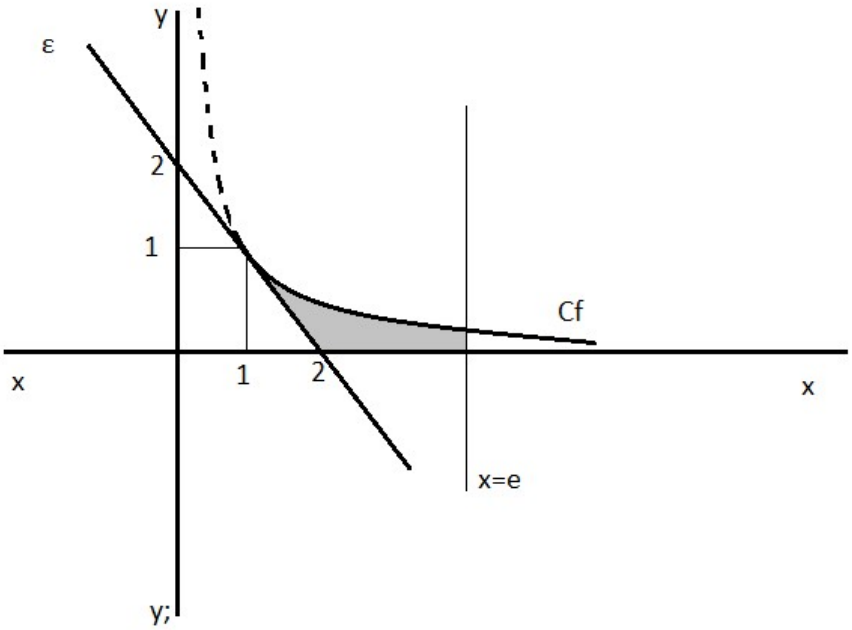
και επειδή η f ως παραγωγίσιμη στο 1, είναι και συνεχής στο 1, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ως γνησίως μονότονη είναι και ''1-1''

Το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$ διότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - 3x + 3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \overset{(-\infty)^2}{=} +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \overset{\frac{1}{+\infty}}{=} 0$$

Γ4.



Έστω Ω_1 το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις κατακόρυφες $x = 1$ και $x = e$. Τότε

$$E(\Omega_1) = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

Έστω Ω_2 το τρίγωνο με κορυφές $A(1,1)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(2,0)$. Τότε $E(\Omega_2) = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$ κοντά στο 1 , τότε $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=l$ και $f(x)=h(x)\cdot(x-1)+2x$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(h(x)\cdot(x-1)+2x\right)=l\cdot 0+2\cdot 1=2$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa\right)=\ln 1-1+\kappa=0-1+\kappa=\kappa-1$$

Επομένως $\kappa-1=2\Leftrightarrow\kappa=3$

Δ2.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=\dfrac{-1}{2-x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$

$$f'(x)=0\overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow}x=1$$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2)$

Έστω $\Delta_1=(0,1)$ και $\Delta_2=[1,2)$

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^-}f(x),\lim_{x\to 1^-}f(x)\right)=(-\infty,2)$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)\overset{\ln 2-\infty+3}{=}-\infty \text{ αφού } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)\overset{\ln 1-1+3}{=}2$$

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 2^-}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$$

$$f(1)=\ln 1-1+3=2$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)\overset{-\infty-\frac{1}{2}-3}{=}-\infty \text{ αφού } \lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)\overset{u=2-x}{=}\lim_{u\to 0}\ln u=-\infty$$

$0 \in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ η οποία είναι μοναδική στο Δ_1 αφού σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως μονότονη.

$0 \in f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ η οποία είναι μοναδική στο Δ_2 αφού σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως μονότονη. Επίσης η ρίζα x_2 δεν μπορεί να είναι το 1 αφού $f(1) \neq 0$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες x_1 και x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ της εξίσωσης $f(x)=0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ δηλαδή υπάρχει αριθμός ζ θετικός κοντά στο 0 με $f(\zeta) < 0$ τότε $f(\zeta)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ και f συνεχής στο $\left[\zeta, \frac{1}{3}\right]$ οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα της f στο $\left(\zeta, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ άρα η μοναδική ριζα x_1 της f στο $(0,1)$ είναι μικρότερη του $\frac{1}{3}$

Δ3.

Αφού η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ από θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \overset{f(x_1)=0}{=} \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ άρα ξ μοναδικό στο $(0,1)$

Επομένως υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (0,1)$ στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της f ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Δ4.

i

Αφού F και G δυο αρχικές της f στο $(0,2)$ έχουμε $F(x)=G(x)+c$ για κάθε $x\in(0,2)$ με $c\in\mathbb{R}$

Τότε $F(x_1)=G(x_1)+c$ και $F(x_2)=G(x_2)+c$

Αφαιρώντας τις παραπάνω κατά μέλη προκύπτει ότι

$$F(x_1)-F(x_2)=G(x_1)-G(x_2)\overset{F(x_1)=G(x_2)=0}{\Leftrightarrow}F(x_2)+G(x_1)=0$$

ii

θεωρούμε την $\varphi(x)=x_1F(x)+x_2G(x)+2x-x_1-x_2$ με $x\in[x_1,x_2]$

$\varphi(x_1)=x_2G(x_1)+x_1-x_2$ και $\varphi(x_2)=x_1F(x_2)+x_2-x_1$

Από θεώρημα μέσης τιμής για την G στο $[x_1,x_2]$ έχουμε ότι υπάρχει $\alpha\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)=G'(\alpha)=\dfrac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{-G(x_1)}{x_2-x_1}$

Όμως η f συνεχής στο (x_1,x_2) και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ άρα η f διατηρεί πρόσημο στο (x_1,x_2) και επειδή $f(1)=2>0$ προκύπτει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$

Τότε και $f(\alpha)>0\Leftrightarrow-\dfrac{G(x_1)}{x_2-x_1}>0\overset{x_2>x_1}{\Leftrightarrow}G(x_1)<0$

Άρα $\varphi(x_1)<0$

$$\varphi(x_2)=x_1F(x_2)+x_2-x_1\overset{F(x_2)=-G(x_1)}{=}x_2-x_1-x_1G(x_1)>0$$

Τότε ισχύει $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$ και φ συνεχής στο $[x_1,x_2]$ οπότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (x_1,x_2)

Επίσης $\varphi'(x)=x_1f(x)+x_2f(x)+2>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και ''1-1'', συνεπώς η ρίζα είναι μοναδική.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Γκουρτζούνης Ανδρέας

Πατσιαρίκα Δάφνη

Χωνιανάκης Αντώνης