ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
17 - 6 - 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 76

Α2. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ.104

Α3. **α)** Ψ

β) ΄Εστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in R$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R ωστόσω η παράγωγός της $f'(x)=3x^2$ μηδενίζεται για x=0 (δεν είναι δηλαδή θετική σ'όλο το R).

Α4. **1.** Λ **2.** Σ **3.** Σ **4.** Σ **5.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{f\circ g}:\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ e^x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, x>0

Β2. ΄Εστω $x_1,x_2\in R$ τέτοια ώστε $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow$

$e^{x_1}e^{x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1}e^{x_2}+2e^{x_1}-e^{x_2}-2\Leftrightarrow 3e^{x_1}=3e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η $f\circ g$ είναι «1-1»

$y=(f\circ g)(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x=\dfrac{y+2}{y-1}$ **(1)**

Πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1}>0\Leftrightarrow (y+2)(y-1)>0\Leftrightarrow y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ οπότε $(1)\Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$

Επίσης πρέπει: $x>0\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)>\ln 1\Leftrightarrow \dfrac{y+2}{y-1}>1\Leftrightarrow \dfrac{y+2}{y-1}-1>0\Leftrightarrow \dfrac{3}{y-1}>0\Leftrightarrow y>1$

Οπότε $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$.

Β3. Είναι $\varphi'(x)=\left(\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right)'=\dfrac{x-1}{x+2}\cdot\dfrac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x+2)(x-1)}<0$, για κάθε $x>1$, δηλαδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

ΝΤΕΠΩ Β. Όλγας 168 2310.428.400
ΕΥΟΣΜΟΣ Μ.Αλεξάνδρου 45 2310.770.360

Β4. $$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\underset{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}(x+2)\right)=+\infty}{\overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1}{\overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=}}\lim_{u\to1}\ln u=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$. Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda=f(0)\ \text{ και }\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=0+\lambda\cdot1=\lambda$$

Πρέπει: $1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0$ (1) Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x+x-1$, $x>0$

Είναι $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, για κάθε $x>0$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα και $\varphi(1)=0$.

Οπότε η εξίσωση (1) $\Leftrightarrow\varphi(\lambda)=0$ έχει μοναδική ρίζα την λ=1.

Γ2. Είναι $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

και $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1=\lambda_{\varepsilon\varphi}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{4}$ αφού $0\le\omega<\pi$.

Γ3. Για x<0: $f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}>0$ για κάθε $x<0$

Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$: $f'(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

Όμως $0<x<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}<\kappa\pi<\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4}$, δηλ. $\kappa=0$ ή $\kappa=1$

Οπότε $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ τα κρίσιμα σημεία της f.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M(α, f(α)) είναι $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)$

Για y=0 $-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow -1+\alpha=x-\alpha\Leftrightarrow x=2\alpha-1$

Είναι $x(t)=2\alpha(t)-1$ και $x'(t)=2\alpha'(t)=2\cdot\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right)=-\frac{2}{3}\alpha(t)$. Επομένως

$x'(t_0)=-\frac{2}{3}\alpha(t_0)=-\frac{2}{3}\cdot(-1)=\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=e^x+2x-e$ και $f''(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x\in R$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Η f' είναι συνεχής στο R άρα και στο [0,1].

$f'(0)=1-e<0$ και $f'(1)=2>0$ οπότε $f'(0)f'(1)<0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ και είναι μοναδικό αφού f' είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $x>x_0 \overset{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και $x<x_0 \overset{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)<0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f(x)		↘		↗	

Στο x_0 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο που είναι το

$f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1 \overset{f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0}{=} e-2x_0+x_0^2-ex_0-1=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$

Δ2. Είναι $\left|(x-x_0)\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right| \le |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \le (x-x_0)\eta\mu\frac{1}{x-x_0} \le |x-x_0|$ και αφού

$\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0| = \lim\limits_{x\to x_0}(-|x-x_0|) = 0$, από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left[(x-x_0)\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right] = 0$

Επίσης για x>x0 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{x-x_0} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = +\infty$, αφού $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$

Ενώ για x<x0 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{1}{x-x_0} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = -\infty$, αφού $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right] = \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0)\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right]\right] = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right] = \lim\limits_{x\to x_0^-}\left[\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0)\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right]\right] = +\infty$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right] = +\infty$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in R$.

$g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in (x_0, 1)$ αφού $x > x_0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$
άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$

Η g είναι συνεχής στο R άρα και στο $[x_0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$g(x_0) = f(x_0) < 0$ αφού $0 < x_0 \overset{f\ \gamma\nu.\ \varphi\theta\iota\nu.}{\Rightarrow} f(x_0) < f(0) = 0$

$g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$, άρα $g(x_0)g(1) < 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_0,1)$ τέτοιος ώστε g(ρ)=0 και είναι μοναδικό αφού η g είναι γν. αύξουσα.

Δ4. Επειδή ϱ είναι ρίζα του ερωτήματος Δ3 ισχύει ότι $f(\varrho)+\varrho=x_0 \Leftrightarrow f(\varrho)=x_0-\varrho$.

$$f(x_0)>f(\varrho)(f'(\varkappa)+1) \Leftrightarrow f(x_0)>(x_0-\varrho)(f'(\varkappa)+1) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0-\varrho}<f'(\varkappa)+1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(\varrho)}{x_0-\varrho}<f'(\varkappa)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[x_0,\varrho]$. Από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi\in(x_0,\varrho): f'(\xi)=\frac{f(\varrho)-f(x_0)}{\varrho-x_0}=\frac{f(x_0)-f(\varrho)}{x_0-\varrho}$$

Όμως $x_0<\xi<\varrho<\varkappa \overset{f'\ \text{γν.αυξ.}}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(\varkappa) \Rightarrow \frac{f(x_0)-f(\varrho)}{x_0-\varrho}<f'(\varkappa)$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καψαλιάρης Στέλιος

Σιταρίδης Σπύρος