Πανελλαδικές Εξετάσεις
Μαθηματικά Κατεύθυνσης
10 Ιουνίου 2019

<u>Θέμα Α</u>

Α₁. α) Σχολικό βιβλίο σελ.12 β) Σχολικό βιβλίο σελ.34-35

Α₂. Σχολικό βιβλίο σελ.142

Α₃. Σχολικό βιβλίο σελ.135

Α₄. α) Λ, $f(x)=\begin{cases}3, x>0\\ 2, x<0\end{cases}$

β) Λ, $f(x)=\begin{cases}3, \ x\neq 2\\ 2, \ x=2\end{cases}$

Α₅. γ

<u>Θέμα Β</u>

Β₁.

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=-e^{-x}+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ με $D_f=\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Επειδή έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ την y=2 τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$

Β₂. Έστω μια νέα συνάρτηση $g(x)=f(x)-x, x\in\mathbb{R}$ συνεχής άρα ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=(e^{-x}+2-x)' \Leftrightarrow g'(x)=-e^{-x}-1=-\left(\frac{1}{e^x}+1\right)<0 \ .$$

όπου $\frac{1}{e^x}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

επίσης η g :

- είναι συνεχής στο R και άρα στο[2,3] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(2)g(3)<0$

$$g(2)=\frac{1}{e^2}>0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad g(3)=\frac{1}{e^3}-1<0$$

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, το οποίο είναι μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g.

Β3. $f'(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα ,οπότε η συνάρτηση είναι 1-1 και οπότε υπάρχει η αντίστροφη της f.

θέτω $y = f(x)$ και θα έχω

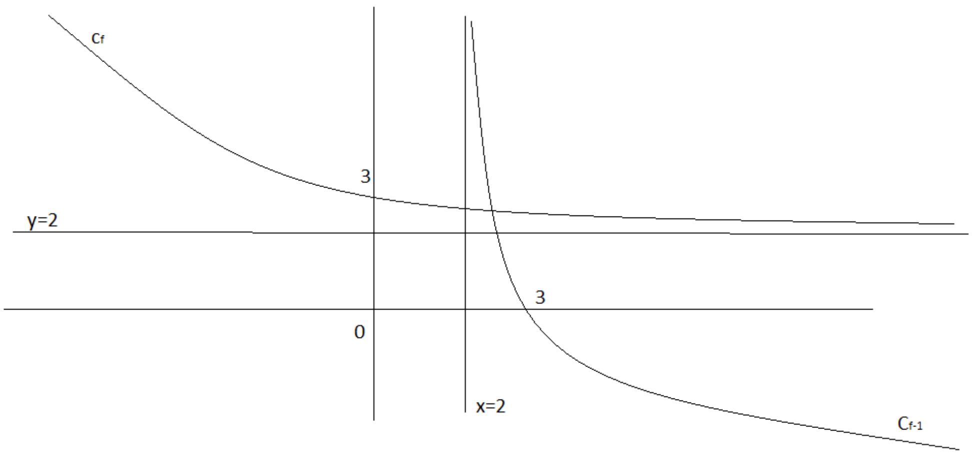
$$y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \ \ , \ y - 2 > 0 \Leftrightarrow y > 2$$

$$\ln(y-2) = \ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln(y-2) = -x \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$$

$$f^{-1}(x) = -\ln(x-2), \ \ x > 2$$

Β4. Η f^{-1} είναι συνεχής στο (2,+∞) ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\ln x, x-2$, άρα αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 2

$\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} -\ln(x-2) = +\infty$, άρα η $f^{-1}(x)$ έχει κατακόρυφη ασύπτωτη, τη x=2 .



Θέμα Γ

Γ1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$$

Η f είναι συνεχής στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 + a = 1 + a = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} + \beta x = 1 + \beta$$

άρα $1 + \beta = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (1)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}=1+\beta$$

άρα $1+\beta=2\Leftrightarrow\beta=1\to\alpha=1$

Γ2.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ e^{x-1}+x & x<1\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}2x>0 & x\geq 1\\ e^{x-1}+1>0 & x<1\end{cases}$$

επειδή $f'(x)>0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ τότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=0+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$$

άρα $f(A)\overset{f\uparrow}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$

Γ3. i)

- f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και άρα και στ0 [-1,0] ώς παραγωγίσιμη
- $f(-1)f(0)<0$

$$f(-1)=e^{-2}-1=\frac{1}{e^2}-1<0\qquad f(0)=\frac{1}{e}>0$$

από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, το οποίο είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) θεωρώ

$$h(x)=f^2(x)-x_0f(x)$$

$$h'(x)=2f(x)f'(x)-x_0f'(x)=f'(x)[2f(x)-x_0]>0,\quad \forall x\in(x_0,+\infty)$$

Επειδή $x>x_0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)=0$

άρα $2f(x)-x_0>0\qquad και\qquad f'(x)>0\quad\forall x\in(x_0,+\infty)$

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)-x_0f(x)\right)=0-x_0\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(f^2(x)-x_0f(x))=+\infty$$

γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}f^2(x)=+\infty\ \text{και}\ \lim_{x\to+\infty}(-x_0f(x))\overset{x_0<0}{=}+\infty$$

$h\left(\left(x_0,+\infty\right)\right)=(0,+\infty)$

άρα το 0 δεν ανήκει στο ΣΤ άρα η εξίσωση h(x)=0 είναι αδύνατη στο $\left(x_0,+\infty\right)$.

Γ4.

$y=x^2+1$

$x(t_0)=3\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$

$x'(t_0)=2\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma / \sec$

$(M\overset{\Delta}{O}K)=\dfrac{OK\cdot KM}{2}=\dfrac{x(x^2+1)}{2}=E$

$E(t)=\dfrac{x(t)\cdot(x^2(t)+1)}{2}$

$E'(t)=\dfrac{1}{2}\left[x'(t)((x^2(t)+1)+x(t)2x(t)x'(t)\right]=\dfrac{1}{2}x'(t)[3x^2(t)+1]$

$E'(t_0)=\dfrac{1}{2}2(3\cdot 3^2+1)=28\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma.\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma / \sec$

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. Δίνεται $f\left(x\right)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $D_f=\mathbb{R}$

$f'\left(x\right)=\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a$ επειδη η ευθεία $y=-x+2$ εφάπτεται στη C_f στο Α(1,1)

πρέπει $\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\beta=1 \\ \alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ \alpha=-1 \end{cases}$

Δ2.

$f''\left(x\right)=\left(\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a\right)'=....=2(x-1)\dfrac{x^2-2x+4}{(x^2-2x+2)^2}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=1,$ $\qquad x^2-2x+4>0\quad(\Delta<0)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	0	+
f			
f'	↘		↗

Επειδή f κυρτη στο [1,2]και η $y=-x+2$ είναι εφατομένη της C_f στο Α(1,1) έχουμε ότι

$f(x)\geq -x+2,\ \forall x\in[1,2]$

οπότε

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^2 (f(x)+x-2)dx=\int_1^2 (x-1)\ln(x^2-2x+2)dx \underset{dx=du}{\overset{x-1=u}{=}} \int_0^1 u\ln(u^2+1)du=\int_0^1\left(\frac{u^2}{2}\right)'\ln(u^2+1)du$$

$$\left[\left[\frac{u^2}{2}\ln(u^2+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{u^3}{u^2+1}du=\left[\left[\frac{u^2}{2}\ln(u^2+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{u(u^2+1)-u}{u^2+1}du=\right.\right.$$

$$\left[\left[\frac{u^2}{2}\ln(u^2+1)\right]_0^1-\int_0^1 udu+\int_0^1\frac{u}{u^2+1}du=\left[\left[\frac{u^2}{2}\ln(u^2+1)\right]_0^1-\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{\ln(u^2+1)}{2}\right]_0^1=...=\ln 2-\frac{1}{2}\tau.\mu.\right.\right.$$

Δ3.

i) Η f’ παρουσιάζει για x=1 ολικό ελάχιστο οπότε f’(x)≥f’(1)=-1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii)

$$f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+2-\lambda$$

$$f(\lambda+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$$

εφαρμόζω ΘΜΤ στην f στο διάστημα [λ,λ+1/2]

από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(λ,λ+1/2)

τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\lambda+1/2)-f(\lambda)}{1/2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}f'(\xi)=f(\lambda+1/2)-f(\lambda)$

άρα $f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}f'(\xi)\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(\xi)\geq-1$

ισχύει από Δ3i

Δ4.

$g'(x)=-3x^2-1$

$g''(x)=-6x \qquad x\in\mathbb{R}$

$g''(x)=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	+	-	
g'	↗	↘	

Άρα η g' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 , οπότε g'(x)≤g'(0)=-1 (1), $\forall x \in \mathbb{R}$
Με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0
έπισης f'(x)≥-1 (2) $\forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1 από Δ3i

Έστω Β($x_1, f(x_1)$) και Γ($x_2, f(x_2)$) σημεία επαφής της κοινής εφαπτομένης με τις C_f, C_g αντίστοιχα. Πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2) \overset{(1,2)}{\Leftrightarrow} x_1 = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = 0$

(ε₁): $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 2$
(ε₂): $y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = -x + 2$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καψαλιάρης Στυλιανός
Νίκου Δημήτρης
Σιταρίδης Σπύρος