ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 04 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 129-129
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 99
Α3. α) ψ **β)** αν για x$\in R$ ισχύει $|f(x)|=|g(x)|$ τότε μερικές περιπτώσεις είναι οι εξής:

i. $f(x)=g(x)$, $x\in R$
ii. $f(x)=|g(x)|$, $x\in R$
iii. $f(x)=\begin{cases} g(x) & , x\le 2 \\ -g(x), & x>2 \end{cases}$
iv. $f(x)=-g(x)$, $x\in R$
v. $f(x)=-|g(x)|$, $x\in R$

και άλλες πολλές παρόμοιες συναρτήσεις.

Α4. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή f παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής στο R άρα θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\beta\cdot 1^3+(a-1)\cdot 1-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+ax-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1)=\beta+\alpha-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+ax-2)=\alpha-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha-1=\beta+\alpha-2 \Rightarrow \beta=1$$

Από τα δεδομένα ξέρω πως $f(-1)=-3 \Leftrightarrow -a-1=-3 \Leftrightarrow a=2$

άρα η f θα έχει την μορφή: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2, & x<1 \\ x^3+x-1, & x\ge 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+x-1-1}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+x-2}{x-1} \Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+2x-x-2}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(x+3)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1} \Leftrightarrow 4=4$$

άρα η f παραγωγίσιμη στο 1.

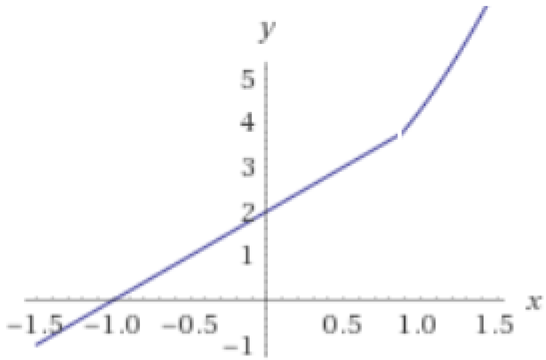
Β2. Η $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2, & x<1 \\ x^3+x-1, & x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+2, & x<1 \\ 3x^2+1, & x\ge 1 \end{cases}$ υπολογίζουμε ότι $\begin{array}{l} f(1)=1 \\ f'(1)=4 \end{array}$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι : $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=4(x-1) \Leftrightarrow y=4x-3$

Β3. Πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις $\begin{cases} f'(x_0)=4,\ x_0<1 \\ f'(x_0)=4,\ x_0\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0+2=4,\ x_0<1 \\ 3x_0^2+1=4,\ x_0\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1,\ x_0<1 \\ x_0=\pm 1,\ x_0\ge 1 \end{cases}$

οπότε ψάχνουμε την εφαπτομένη για $x_0=1$, από Β2 ερώτημα έχουμε $y=4x-3$

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=(x-1)^2+3>0$ για κάθε $x\in R$ οπότε $D_f=R$.

έστω $x_1=0$ και $x_2=2$, όπου $x_1<x_2$

$f(0)=2$ και $f(1)=1+\sqrt{3}$, όπου $f(0)<f(1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Η f είναι 1-1 γιατί είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=R$.

Λύνω την εξίσωση $f(x)=y$

$f(x)=y \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-2x+4}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4}=y-x \Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+4=y^2-2xy+\cancel{x^2}$

όπου $y-x\ge 0 \Leftrightarrow y\ge x$

$$-2x+4=y^2-2xy \Leftrightarrow -2x+2xy=y^2-4 \Leftrightarrow x(2y-2)=y^2-4 \Leftrightarrow x=\frac{y^2-4}{2(y-1)},\ y\ne 1$$

$$y\ge x \Leftrightarrow y\ge \frac{y^2-4}{2(y-1)} \Leftrightarrow y-\frac{y^2-4}{2(y-1)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2y^2-2y-y^2+4}{2(y-1)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{y^2-2y+4}{2(y-1)}\ge 0 \overset{y^2-2y+4>0}{\underset{από\ Γ1}{\Leftrightarrow}} y>1$$

άρα η $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-4}{2(x-1)},\ x>1$

Γ3. i) Έστω x_1,x_2 όπου $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2)) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ άρα $f^{-1}\nearrow$

επίσης έστω $f(x)>x \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-2x+4}>x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4}>0$ που ισχύει για κάθε $x\in R$.

ii) Πρέπει νδο $f(x)>f^{-1}(x)$, άρκει νδο $f(x)>x>f^{-1}(x)$

από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει: $f(x)>x \overset{f^{-1}\nearrow}{\Rightarrow} x>f^{-1}(x)$

άρα ισχύει $f(x)>x>f^{-1}(x) \Rightarrow f(x)>f^{-1}(x)$

Γ4. i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x^2-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x(x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x^2-2x+4}-2}{x(x-5)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x-5)}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-2}{x(x-5)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-5}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+4-4}{x(x-5)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}=$$

$$-\frac{1}{5}+\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{(x-5)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}=-\frac{1}{5}+\frac{-2}{(-5)\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=-\frac{1}{10}$$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(f^3(x)-f(x)-7)=2^3-2-7=8-9=-1<0$ για x κοντά στο 0 το όριο θα γίνει

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f^3(x)-f(x)-7|-1}{x^2-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{-f^3(x)+f(x)+7-1}{x^2-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{-f^3(x)+f(x)+6}{x(x-5)}$$

κάνω παραγοντοποίηση στον αριθμητή με την βοήθεια του σχήματος Horner

-1	0	1	6	2
	-2	-4	-6	
-1	-2	-3	0	

$$\lim_{x\to 0}\frac{-f^3(x)+f(x)+6}{x(x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)-2][-f^2(x)-2f(x)-3]}{x(x-5)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x(x-5)}\cdot\lim_{x\to 0}(-f^2(x)-2f(x)-3)\overset{\alpha\pi\acute{o}\ \Gamma 4i}{=}\left(-\frac{1}{10}\right)(-11)=\frac{11}{10}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Η f ειναι συνεχής και διάφορη του μηδενός οπότε η f διατηρεί πρόσημο , άρα $f(2), f(4), f(8)$ ομόσημοι και επειδή $f(2)f(4)f(8)=64>0$, $f(2), f(4), f(8)$ είναι θετικοί⟶ $f(x)>0$ για κάθε $x\in[2,8]$.

β. Ισχύει $2<4<8\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(2)>f(4)>f(8)\Leftrightarrow f(8)<f(4)<f(2)$

$f^3(8)<f(2)f^2(8)<f(2)f(4)f(8)=64<f^2(2)f(8)<f^3(2)$

άρα $f^3(8)<64<f^3(2)\Leftrightarrow f(8)<4<f(2)$

συμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_1\in(2,8)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=4$

γ. Έστω $f(x)>x$ για κάθε $x\in[2,8]$ τότε $f(2)>2,\ f(4)>4,\ f(8)>8$, άρα $f(2)f(4)f(8)>64$ άτοπο.

Όμοια για $f(x)<x$. Άρα θα υπάρχει $x_2\in[2,8]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=x_2$.

β τρόπος: Με θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x,\ \ x\in[2,8]$

Δ2.

α. Επειδή η g είναι συνεχής και $g(1)=\frac{1}{2}<1<2=g(3)$, υπάρχει $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=1$.

β. Αν θέσω όπου $x=x_0$ του προηγούμενου ερωτήματος στην δοθείσα σχέση θα έχουμε $g(1)g(2)=g(3)g(4)$.

γ. Έστω $h(x)=g^2(x)-g(1)g(2)$, όπου $h(1)h(2)=\left(g^2(1)-g(1)g(2)\right)\left(g^2(2)-g(1)g(2)\right)=$

$g(1)\left(g(1)-g(2)\right)g(2)\left(g(2)-g(1)\right)=$

$-g(1)g(2)\left(g(1)-g(2)\right)^2$

- αν $g(1)=g(2)$, τότε $x_1=1$ ή $x_1=2$
- αν $g(1)\neq g(2)$ και επειδή $g(x)\neq 0$ και $g(1)=\frac{1}{2}>0\Rightarrow g(1)g(2)>0\Rightarrow h(1)h(2)<0$ άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano (h συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων), οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0\Rightarrow g^2(x_1)=g(1)g(2)$

δ. Όμοια με το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει $x_2\in[3,4]$ τέτοιο ώστε $g^2(x_2)=g(3)g(4)$.
από το ερώτημα (β) γνωρίζουμε ότι $g(1)g(2)=g(3)g(4)\Rightarrow g^2(x_1)=g^2(x_2)$ επειδή η $g(x)>0$
$g(x_1)=g(x_2)$, άρα η g δεν αντιστρέφεται.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

ΚΑΨΑΛΙΑΡΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ

ΝΙΚΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΣΙΤΑΡΙΔΗΣ ΣΠΥΡΟΣ