ΝΤΕΠΩ Β. Όλγας 168 2310.428.400
ΕΥΟΣΜΟΣ Μ.Αλεξάνδρου 45 2310.770.360

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
**Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΘΕΡΙΝΑ)**
**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 3 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2019**
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** σχολικό βιβλίο σελ.49

**Α2.** **1)** σχολικό βιβλίο σελ.33

**2)** σχολικό βιβλίο σελ.74

**3)** σχολικό βιβλίο σελ.70

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

**1)**Σ, **2)Σ,** **3)**Λ, **4)**Λ **5)**Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $e^x-1\ge 0\Rightarrow e^x\ge 1\Rightarrow e^x\ge e^0\Rightarrow x\ge 0$, άρα $D_f=[0,+\infty)$

*για* κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2+\sqrt{e^{x_1}-1}=2+\sqrt{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-1}=\sqrt{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow e^{x_1}-1=e^{x_2}-1\Leftrightarrow$$
$$e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

συνεπώς η f είναι συνάρτηση 1-1.

**Β2.**

$$y=2+\sqrt{e^x-1}\Rightarrow y-2=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow (y-2)^2=e^x-1\Rightarrow (y-2)^2+1=e^x\Rightarrow \ln[(y-2)^2+1]=x\Rightarrow$$
$x=\ln[(y-2)^2+1]$, άρα $f^{-1}(x)=\ln[(x-2)^2+1]$, $D_{f^{-1}}=f(D_f)=[2,+\infty)$

$$0=\ln[(x-2)^2+1]\Leftrightarrow \ln[(x-2)^2+1]=\ln 1\Leftrightarrow (x-2)^2+1=1\Leftrightarrow (x-2)^2=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2,$$

άρα η $C_{f-1}$ , τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο (2,0)

**Β3.** $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2+\sqrt{e^{g(x)}-1}=2+\sqrt{e^{\ln(x-2)}-1}=2+\sqrt{x-2-1}=2+\sqrt{x-3}$

$$\left.\begin{matrix}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x\in(2,+\infty)\\ g(x)\in[0,+\infty)\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x>2\\ g(x)\ge 0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x>2\\ \ln(x-2)\ge 0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x>2\\ \ln(x-2)\ge \ln 1\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x>2\\ x-2\ge 1\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x>2\\ x\ge 3\end{matrix}\right\}$$ άρα $D_{fog}=[3,+\infty)$

$(f\circ g)(x)>3\Rightarrow 2+\sqrt{x-3}>3\Rightarrow \sqrt{x-3}>1\Rightarrow x-3>1\Rightarrow x>4$, άρα η γραφική παράσταση της fog βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=3, για $x\in(4,+\infty)$

**Β4.**

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}\ln(x-2) \underset{\lim_{x\to 2^+}(x-2)=0}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to 0^+}\ln u = -\infty \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln(x-2) \underset{\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$$

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται $f: R \to R$ για την οποία ισχύει η σχέση $2f(x)+f(-x) = x+e^{-x}+2e^{x}$, για κάθε x $\in R$

**Γ1.**

Έστω $2f(x)+f(-x) = x+e^{-x}+2e^{x}$ (1)

$\gamma\iota\alpha \;\; x=-x, \;\; \eta$ (1) γίνεται $2f(-x)+f(x) = -x+e^{x}+2e^{-x}$ (2)

$(1) \overset{*(-2)}{\Rightarrow} -4f(x)-2f(-x) = -2x-2e^{-x}-4e^{x}$ (3)

$(2)+(3) \Rightarrow -3f(x) = -3x-3e^{x} \Rightarrow f(x) = x+e^{x}, \;\; x\in\mathbb{R}$

**Γ2.** θα χρειαστούμε την μονοτονία της f,

$\gamma\iota\alpha$ κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \mu\varepsilon \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$x_1 < x_2$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, συνεπώς f γνησίως αύξουσα στο R .

$$e^{x^4} - e^{2x^2} \ge x^2(2-x^2) \Leftrightarrow e^{x^4} - e^{2x^2} \ge 2x^2 - x^4 \Leftrightarrow e^{x^4} + x^4 \ge e^{2x^2} + 2x^2 \Leftrightarrow f(x^4) \ge f(2x^2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$$
$$x^4 \ge 2x^2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-2) \ge 0, \;\; \text{συνεπώς x} \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

μονάδες 6

**Γ3.** η f είναι 1-1 ως γνησίως μονότονη.

$$\ln\frac{x}{e} = e^{1-x} - 2x \Leftrightarrow \ln x - \ln e = e^{1-x} - x - x \Leftrightarrow \ln x - 1 + x = e^{1-x} - x \Leftrightarrow x + \ln x = e^{1-x} + 1 - x \Leftrightarrow$$
$$e^{\ln x} + \ln x = e^{1-x} + (1-x) \Leftrightarrow f(\ln x) = f(1-x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \ln x = 1-x \Leftrightarrow x + \ln x = 1 \Leftrightarrow e^{\ln x} + \ln x = 1 \Leftrightarrow$$
$$f(\ln x) = f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

μονάδες 6

**Γ4.** ε: y=6x+1 θέτω g(x)=6x-1 ,x∈R. Για να έχει η $C_f$ με τη $C_g$, τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη στο (-1,1), αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση f(x)=g(x) έχει τουλάχιστον μια λύση στο (-1,1) θέτω h(x)=f(x)-g(x), x∈[-1,1]

•h συνεχής στο [-1,1] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων (f άθροισμα συνεχών, g πολυωνυμική)

•h(-1)h(1)<0

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=-1+e^{-1}-6(-1)+1=e^{-1}+6>0$$
$$h(1)=f(1)-g(1)=1+e^{1}-6\cdot 1+1=e-4<0$$

Άρα από θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για x=0 :

$$f^3(0)+2f(0)=12e^0\Rightarrow f^3(0)+2f(0)-12=0\Rightarrow y^3+2y-12=0\overset{Horner}{\Rightarrow}(y-2)(y^2+2y+6)=0\Rightarrow y=2$$

άρα f(0)=2 δηλ. το σημείο τομής της $C_f$ με τον άξονα y'y είναι το A(0,2).

**Δ2.**

$$f^3(x)+2f(x)=12e^x\Rightarrow f(x)(f^2(x)+2)=12e^x\overset{f^2(x)+2>0}{\Rightarrow}f(x)=\frac{12e^x}{f^2(x)+2}>0$$

*συνεπώς*

f(x)>0, για κάθε $x\in R$

**Δ3.**

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)\quad(1)$$
$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)\quad(2)$$
$$(1)+(2)\Rightarrow f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)\Leftrightarrow 12e^{x_1}=12e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

άρα η f είναι 1-1.

$$6e^{|x|-3}=f(|x|-3)+4\Leftrightarrow 12e^{|x|-3}=2f(|x|-3)+8\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f^3(|x|-3)+2f(|x|-3)=2f(|x|-3)+8\Leftrightarrow$$
$$f^3(|x|-3)=8\Leftrightarrow f(|x|-3)=2\overset{απο\ Δ1}{\Leftrightarrow}f(|x|-3)=f(0)\overset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow}|x|-3=0\Leftrightarrow|x|=3\Leftrightarrow x=\pm3$$

μονάδες 4

**Δ4.** 1) Επειδή f(2019)>0, f(2020)>0 και για x>0 ισχύει $|ημx|<x\Leftrightarrow -x<ημx<x$ έχουμε ότι

$$-f(2020)<ημf(2020)\Leftrightarrow ημf(2020)+f(2020)>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-f(2019)x^3+4x^2-6}{1+\left[\etaμf(2020)+f(2020)\right]x^2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-f(2019)x^3}{\left[\etaμf(2020)+f(2020)\right]x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-f(2019)}{\left[\etaμf(2020)+f(2020)\right]}\cdot x\right]=+\infty\ ,$$

αφού $\dfrac{-f(2019)}{\etaμf(2020)+f(2020)}<0$

2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)+2}-\sigmaυν\left[f(x)-2\right]-1}{f^2(x)-4}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)+2}-2+1-\sigmaυν\left[f(x)-2\right]}{f^2(x)-4}=$$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{f(x)+2}-2}{f^2(x)-4}+\frac{1-\sigmaυν\left[f(x)-2\right]}{f^2(x)-4}\right]=$$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\left[f(x)+2\right]\left[\sqrt{f(x)+2}+2\right]}+\frac{1-\sigmaυν\left[f(x)-2\right]}{f(x)-2}\cdot\frac{1}{f(x)+2}\right]=\frac{1}{4\cdot4}+0\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\ ,$$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\sigmaυν\left[f(x)-2\right]}{f(x)-2}\underset{\lim_{x\to0}\left[f(x)-2\right]=0}{\overset{f(x)-2=u}{=}}\lim_{u\to0}\frac{1-\sigmaυν u}{u}=0.$

**Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:**
**Καψαλιάρης Στέλιος**
**Σιταρίδης Σπύρος**