ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
3 - 5 - 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελ. 133.

Α2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελ. 162.

Α3. Πρέπει επιπλέον να ισχύει η (**3**). Επειδή $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in R$, υπάρχει $c\in R$, τέτοιος ώστε $f(x)=g(x)+c$ (1) για κάθε $x\in R$. Για να είναι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$ πρέπει c=0. Για x=0 από (1) έχουμε ότι $f(0)=g(0)+c$, οπότε πρέπει f(0)=g(0).

Α4. **1.** Σ **2.** Σ **3.** Λ **4.** Σ **5.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=4$ ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+\alpha e^x+\beta\right)=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\left(e^x\right)^2+\alpha e^x+\beta\right)=4 \Leftrightarrow 0^2+\alpha\cdot 0+\beta=4 \Leftrightarrow \beta=4.$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1-\alpha-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}+\alpha e^x+\beta-1-\alpha-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)+\alpha\left(e^x-1\right)}{x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1+\alpha\right)}{x}=1\cdot(1+1+\alpha)=2+\alpha$ αφού $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$.

Οπότε $2+\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=-4$.

<u>*2ος ΤΡΟΠΟΣ:*</u> Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2e^{2x}+\alpha e^x$ και $f(0)=1+\alpha+\beta$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1-\alpha-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2e^0+\alpha e^0=2+\alpha$. Οπότε $2+\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=-4$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2e^{2x}-4e^x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{2x}-4e^x=0 \Leftrightarrow 2e^x\left(e^x-2\right)=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln2$ και

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{2x}-4e^x>0 \Leftrightarrow 2e^x\left(e^x-2\right)>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln2$, $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<\ln2$

x	$-\infty$	$\ln2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει για $x=\ln 2$ ολικό ελάχιστο που είναι το $f(\ln 2)=e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+4=4-8+4=0$.

$f''(x)=4e^{2x}-4e^{x}$ για κάθε $x\in R$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4e^{2x}-4e^{x}=0 \Leftrightarrow 4e^{x}(e^{x}-1)=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 4e^{2x}-4e^{x}>0 \Leftrightarrow 4e^{x}(e^{x}-1)>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$, $f''(x)<0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$. Η C_f έχει σημείο καμπής το σημείο Α(0, f(0)) ή Α(0, 1).

Β3. Είναι $f(0)=1$ άρα στο Α(0,1) τέμνει τον $y'y$ και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι

$$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y-1=-2x \Leftrightarrow y=-2x+1$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και η $y=-2x+1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο Α(0,1) ισχύει ότι $f(x)\geq -2x+1 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^{x}+4\geq -2x+1 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^{x}+3\geq -2x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Β4. **α)** Αφού $f(x)\geq -2x+1$ για κάθε $x\in[0,1]\subseteq[0,+\infty)$ έχουμε ότι:

$$E_1=\int_0^1 |f(x)-(-2x+1)|dx=\int_0^1[f(x)+2x-1]dx=\int_0^1(e^{2x}-4e^{x}+3+2x)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-4e^{x}+3x+x^2\right]_0^1=$$

$$=\frac{e^2}{2}-4e+3+1-\frac{1}{2}+4=\frac{e^2}{2}-4e+\frac{15}{2} \text{ τ.μ.}$$

β) Αφού $f(x)=(e^{x}-2)^2\geq 0$ για κάθε $x\in R$, έχουμε ότι:

$$E_2=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(e^{2x}-4e^{x}+4)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-4e^{x}+4x\right]_0^1=\frac{e^2}{2}-4e+4-\frac{1}{2}+4=$$

$$=\frac{e^2}{2}-4e+\frac{15}{2} \text{ τ.μ. Άρα } E_1=E_2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης $\left[f(x)\right]^3+4f(x)=16x$ **(1)** έχουμε ότι

$\left[\left[f(x)\right]^3+4f(x)\right]'=(16x)'\Rightarrow 3f^2(x)f'(x)+4f'(x)=16\Rightarrow f'(x)=\dfrac{16}{3f^2(x)+4}>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

$(1)\Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+4\right]=16x\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{16x}{f^2(x)+4}$, $x\in R$. Οπότε $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και

για x>0 είναι f(x)>0 ενώ για x<0 είναι f(x)>0.

β) Επειδή $f'(x)=\dfrac{16}{3f^2(x)+4}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο R, έχουμε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη

με $f''(x)=\left(\dfrac{16}{3f^2(x)+4}\right)'=-\dfrac{16\left(3f^2(x)+4\right)'}{\left(3f^2(x)+4\right)^2}=-\dfrac{96f(x)f'(x)}{\left(3f^2(x)+4\right)^2}$. Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και

$\left(3f^2(x)+4\right)^2>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο της f.

Για x>0 είναι f(x)>0, οπότε $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Για x<0 είναι f(x)<0, οπότε $f''(x)<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Γ2. Για α=β έχουμε ότι $|f(\alpha)-f(\beta)|\le 4|\alpha-\beta|\Leftrightarrow 0\le 0$ που ισχύει.

Για $\alpha<\beta \overset{f\ \text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha)<f(\beta)$ έχουμε ότι

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\le 4|\alpha-\beta|\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)\le 4(\beta-\alpha)\Leftrightarrow\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\le 4 \quad (2)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο [α,β], οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\dfrac{16}{3f^2(\xi)+4}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Όμως $\dfrac{16}{3f^2(\xi)+4}\le 4\Leftrightarrow 16\le 12f^2(\xi)+16\Leftrightarrow 12f^2(\xi)\ge 0$ που ισχύει, οπότε ισχύει και η (2).

Γ3. Έστω (ε) μία εφαπτόμενη ευθεία της C_f, με σημείο επαφής το $M(x_0,f(x_0))$, παράλληλη προς την

ευθεία (ζ): $4x-13y=0$. Τότε $\lambda_\varepsilon=\lambda_\zeta\Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{4}{13}\Leftrightarrow\dfrac{16}{3f^2(x_0)+4}=\dfrac{4}{13}\Leftrightarrow 12f^2(x_0)+16=208\Leftrightarrow$

$f^2(x_0)=16\Leftrightarrow f(x_0)=4$ ή $f(x_0)=-4$.

Για $x=x_0$ η (1) γίνεται $f^3(x_0)+4f(x_0)=16x_0$ (3)

Αν $f(x_0)=4$ από την (3) έχουμε $4^3+4\cdot 4=16x_0\Leftrightarrow x_0=5$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

(ε_1): $y-f(5)=f'(5)(x-5)\Leftrightarrow y-4=\frac{4}{13}(x-5)\Leftrightarrow y=\frac{4}{13}x+\frac{32}{13}$.

Αν $f(x_0)=-4$ από την (3) έχουμε $(-4)^3+4\cdot(-4)=16x_0\Leftrightarrow x_0=-5$ και η εξίσωση της εφαπτομένης

Είναι (ε_2): $y-f(-5)=f'(-5)(x+5)\Leftrightarrow y+4=\frac{4}{13}(x+5)\Leftrightarrow y=\frac{4}{13}x-\frac{32}{13}$.

Γ4. Για κάθε $x\in R$ ισχύει $[f(x)]^3+2e^x-|f''(\alpha)|x\ge 15x-4f(x)+2$

$\Leftrightarrow [f(x)]^3+4f(x)+2e^x-15x-2-|f''(\alpha)|x\ge 0\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x+2e^x-2-|f''(\alpha)|x\ge 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=x+2e^x-2-|f''(\alpha)|x$, $x\in R$, με $h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$.

Είναι $h(0)=0+2e^0-2-|f''(\alpha)|\cdot 0=0$ οπότε $h(x)\ge h(0)$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η h παρουσιάζει για x=0 ελάχιστο. Η h είναι επίσης παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=1+2e^x-|f''(\alpha)|$, $x\in R$.

Από Θεώρημα Fermat προκύπτει ότι $h'(0)=0\Leftrightarrow 1+2e^0-|f''(\alpha)|=0\Leftrightarrow |f''(\alpha)|=3\overset{\alpha>0\text{ άρα } f''(\alpha)>0}{\Leftrightarrow} f''(\alpha)=3$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα (0,1), $(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1-x\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{x\ln x}{x-1}\right)=1-\frac{0}{0-1}=1$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$ Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1=f(0)$,

δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0.

- $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1-x\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1-x\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1^-}(1-\ln x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x\ln x)=0=f(1)$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο 1.

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$.

Για x>1 έχουμε ότι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ απορρίπτεται καθώς $\frac{1}{e}<1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x)=\left(\frac{x-1-x\ln x}{x-1}\right)'=\frac{(1-\ln x-1)(x-1)-(x-1-x\ln x)}{(x-1)^2}=$

$\frac{-x\ln x+\ln x-x+1+x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}$.

Για 0<x<1 έχουμε ότι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \ln x-x+1=0$ **(1).**

Θεωρούμε $h(x)=\ln x-x+1$ με $x\in(0,1)$ και $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) και $0<x<1 \Rightarrow h(x)<h(1) \Rightarrow h(x)<0$.

Άρα η (1) δεν έχει λύση στο (0,1).

Είναι $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^+}(\ln x+1)=1$ και $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{x-1-x\ln x}{x-1}}{x-1}=$

$\lim_{x\to1^-}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1-x\ln x)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to1^-}\frac{-\ln x}{2(x-1)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{x}}{2}=-\frac{1}{2}\neq1=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, άρα το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Δ2. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $h(x)<0 \Leftrightarrow \frac{h(x)}{(x-1)^2}<0 \Leftrightarrow f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα

και έτσι έχουμε ότι $0<x<1 \Rightarrow f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>0$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $x>1 \Rightarrow \ln x>\ln 1 \Rightarrow \ln x>0 \Rightarrow \ln x+1>0 \Rightarrow f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και έτσι έχουμε ότι $x>1 \Rightarrow f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>0$.

Αφού f(1)=0 η x=1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. Οπότε

$f\left(\frac{2f(x)+1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2f(x)+1}{2}=1 \Leftrightarrow 2f(x)+1=2 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$ **(2)**

Είναι $f((0,1))=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=(0,1)$. Όμως $\frac{1}{2}\in f((0,1))$ και f γν. φθίνουσα οπότε η (2) έχει μία ακριβώς ρίζα στο (0,1). Επίσης είναι $f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Όμως $\frac{1}{2}\in f\left((1,+\infty)\right)$ και f γν. αύξουσα οπότε η (2) έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Οπότε η (2) έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Δ3. $\int_\rho^1 2f^2(x)dx > \int_\rho^1 f(x)dx \Leftrightarrow -\int_1^\rho 2f^2(x)dx > -\int_1^\rho f(x)dx \Leftrightarrow \int_1^\rho 2f^2(x)dx < \int_1^\rho f(x)dx$

Είναι $1\le x\le \rho \overset{f\text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(1)\le f(x)\le f(\rho) \Leftrightarrow 0\le f(x)\le \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)\ge 0$ και $2f(x)-1\le 0$,

οπότε $f(x)\left[2f(x)-1\right]\le 0$ για κάθε $x\in[1,\rho]$ χωρίς να είναι παντού μηδέν στο $[1,\rho]$.

Συνεπώς $\int_1^\rho f(x)\left[2f(x)-1\right]dx<0 \Leftrightarrow \int_1^\rho \left[2f^2(x)-f(x)\right]dx<0 \Leftrightarrow \int_1^\rho 2f^2(x)dx-\int_1^\rho f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^\rho 2f^2(x)dx < \int_1^\rho f(x)dx$

Δ4. $\ln\left[f(x)+1\right]=1-e^{f(x)}$ **(3)**

Για x=1 η (3) γίνεται: $\ln\left[f(1)+1\right]=1-e^{f(1)} \Leftrightarrow \ln 1=1-e^0 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει.
Για $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ έχουμε ότι:

- $f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)+1>1 \Leftrightarrow \ln\left[f(x)+1\right]>\ln 1=0$
- $f(x)>0 \Leftrightarrow e^{f(x)}>e^0 \Leftrightarrow -e^{f(x)}<-1 \Leftrightarrow 1-e^{f(x)}<0$

Επομένως η (3) είναι αδύνατη στο $[0,1)\cup(1,+\infty)$. Άρα η μοναδική λύση της (3) είναι η x=1.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καψαλιάρης Στέλιος

Νίκου Δημήτρης

Παπαθανασίου Νίκος

Σιταρίδης Σπύρος