ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
3 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 106.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 95.

Α3. **α)** **Ψ**

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in R$ με $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο $x_0=0$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Α4. **1.** Σωστό **2.** Σωστό **3.** Σωστό **4.** Λάθος **5.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α)** Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot f(x)\right)'=\frac{f'(x)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)'f(x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{f'(x)\left(x^2+1\right)-2xf(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Είναι $h(0)=\frac{1}{0^2+1}\cdot f(0)=f(0)$ άρα οι C_f,C_h έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0=0$ και

$$h'(0)=\frac{f'(0)\left(0^2+1\right)-2\cdot 0\cdot f(0)}{\left(0^2+1\right)^2}=f'(0)$$ άρα οι C_f,C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=0$.

β) Είναι $\varphi(x)=\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2 \Rightarrow {x_1}^2>{x_2}^2 \Rightarrow {x_1}^2+1>{x_2}^2+1 \Rightarrow$

$\frac{1}{{x_1}^2+1}<\frac{1}{{x_2}^2+1} \Rightarrow \varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ και $\varphi(0)=1$, οπότε $\varphi((-\infty,0]) \underset{\varphi \text{ συνεχής}}{\overset{\varphi \nearrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x),\varphi(0)\right]=(0,1]$

Β2. **α)** Επειδή g παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ είναι και συνεχής στο $x_0=0$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0)$$

Όμως $\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{0}{\sqrt{0^2+1}+1}=0$

και $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\beta x}{2}+\alpha\right)=\alpha=g(0)$, οπότε $\alpha=0$.

Επειδή g παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει ότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}\in R$

Όμως $\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0^2+1}+1}=\frac{1}{2}$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\beta x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta x}{2x}=\frac{\beta}{2}$, οπότε $\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=1$.

β) Για $x<0$: $g'(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)'x-\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)(x)'}{x^2}=\frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}+1}{x^2}=$

$=\frac{x^2-x^2-1+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. Για $x>0$: $g'(x)=\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}$ και $g'(0)=\frac{1}{2}$ οπότε έχουμε ότι:

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}, & x<0\\ \frac{1}{2}, & x\geq 0\end{cases}$$

γ) $\lim_{x\to+\infty} xg\left(\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{g(u)}{u}=g'(0)=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)+1}{x-1}$ με $\lim_{x\to 1} g(x)=3\mu$ και $f(x)=g(x)(x-1)-1$ για κάθε x κοντά στο 1.

Οπότε $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[g(x)(x-1)-1\right]=3\mu(1-1)-1=-1=f(1)$ αφού f συνεχής στο 1.

Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{x+1}$ με $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=\mu$ και $f(x)=h(x)(x+1)+1$ για κάθε x κοντά στο -1.

Οπότε $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left[h(x)(x+1)+1\right]=\mu(-1+1)+1=1=f(-1)$ αφού f συνεχής στο -1.

β) f γνησίως μονότονη στο R$\Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα στο R ή f γνησίως φθίνουσα στο R

΄Εστω f γνησίως αύξουσα στο R. Τότε $-1<1 \overset{\text{f γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(-1)<f(1)\Leftrightarrow 1<-1$ άτοπο.

Άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Γ2. Είναι $-1<-\dfrac{1}{2}<1 \overset{\text{f γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(1)<f\left(-\dfrac{1}{2}\right)<f(-1)$ (1)

$-1<0<1 \overset{\text{f γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(1)<f(0)<f(-1)$ (2)

$-1<\dfrac{1}{2}<1 \overset{\text{f γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(1)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(-1)$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

$$3f(1)<f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)<3f(-1)\Leftrightarrow f(1)<\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)}{3}<f(-1)$$

Η f είναι συνεχής στο R, άρα και στο [-1,1] οπότε από θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\dfrac{f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)}{3}$.

Γ3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)+1}{x-1}+\dfrac{f(-x)-1}{x-1}\right)=3\mu-\mu=2\mu$

αφού $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(-x)-1}{x-1}\underset{\lim\limits_{x\to 1}(-x)=-1}{\overset{-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to -1}\dfrac{f(u)-1}{-u-1}=-\lim\limits_{u\to -1}\dfrac{f(u)-1}{u+1}=-\mu$

Γ4. **Είναι** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3\mu$ και $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=\mu$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' στο σημείο της $A(x_0,f'(x_0))$

είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε): $y=\mu x$ αν και μόνο αν $f''(x_0)=\mu$.

Όμως η f' είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο [-1,1]. Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0\in(-1,1)$ τέτοιος ώστε $f''(x_0)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{3\mu-\mu}{2}=\mu$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Για $x=1$ η (1) γίνεται:

$$e^{2f(1)}-2e^{f(1)}=\frac{1-1}{1}\Leftrightarrow e^{f(1)}\left[e^{f(1)}-2\right]=0\Leftrightarrow e^{f(1)}-2=0\Leftrightarrow e^{f(1)}=2\Leftrightarrow f(1)=\ln 2>0$$

Οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

β) $$(1)\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2e^{f(x)}=\frac{1}{x^2}-1\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2e^{f(x)}+1=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left[e^{f(x)}-1\right]^2=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left|e^{f(x)}-1\right|=\frac{1}{x}\quad(2)$$

Όμως $f(x)>0\Leftrightarrow e^{f(x)}>e^0\Leftrightarrow e^{f(x)}>1\Leftrightarrow e^{f(x)}-1>0$ οπότε

$$(2)\Leftrightarrow e^{f(x)}-1=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow e^{f(x)}=1+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Rightarrow 1+\frac{1}{x_1}>1+\frac{1}{x_2}\overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow}$

$\ln\left(1+\frac{1}{x_1}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Είναι $e^{\varrho}=\frac{\varrho+1}{\varrho}\Leftrightarrow e^{\varrho}=1+\frac{1}{\varrho}\Leftrightarrow\ln(e^{\varrho})=\ln\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)\Leftrightarrow\varrho=f(\varrho)\Leftrightarrow f(\varrho)-\varrho=0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x>0$, συνεχή ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x_1)>f(x_2)$ (3) και $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2$ (4)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4) προκύπτει $f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$,

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

$$g((0,1))\underset{g\ \text{συνεχής}}{\overset{g\searrow}{=}}\left(\lim_{x\to1^-}g(x),\ \lim_{x\to0^+}g(x)\right)=(\ln 2-1,+\infty)\quad\text{αφού}$$

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\ln 2-1<0\quad\text{και}$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]\underset{\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty}{\overset{1+\frac{1}{x}=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\left[\ln u-\frac{1}{u-1}\right]=+\infty$$

Επειδή $0\in g((0,1))$ και $g\searrow(0,1)$ υπάρχει μοναδικός $\varrho\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $g(\varrho)=0\Leftrightarrow f(\varrho)=\varrho$

Δ3. **α)** Είναι $h(x)=\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)}=\dfrac{1}{\ln(1+x)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{\ln(1+x)-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}=\dfrac{1}{\ln\left[(1+x)\cdot\frac{x}{x+1}\right]}=$

$=\dfrac{1}{\ln x}$, $x>1$.

β) Ισχύει για κάθε $x>1$ ότι $\left|(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\cdot h(x)\right|=\left|\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\ln x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|}{|\ln x|}\le\dfrac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{\ln x}\le\dfrac{2}{\ln x}$

οπότε $-\dfrac{2}{\ln x}\le(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\cdot h(x)\le\dfrac{2}{\ln x}$. Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\ln x}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\cdot h(x)\right]=0$.

γ) Είναι $h'(x)=\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=-\dfrac{(\ln x)'}{\ln^2 x}=-\dfrac{1}{x\cdot\ln^2 x}$. Επίσης οι συντεταγμένες του A ως συνάρτηση του χρόνου είναι $A\left(\alpha(t),\dfrac{1}{\ln\alpha(t)}\right)$ με $\alpha'(t)=2cm/s$.

Η εφαπτομένη της C_h στο $A(\alpha, h(\alpha))$ είναι $y-h(\alpha)=h'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\dfrac{1}{\ln\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$y=-\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}(x-\alpha)+\dfrac{1}{\ln\alpha}\Leftrightarrow y=-\dfrac{x}{\alpha\ln^2\alpha}+\dfrac{1}{\ln^2\alpha}+\dfrac{1}{\ln\alpha}$.

Για $y=0$ έχουμε ότι: $0=-x+\alpha+\alpha\ln\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+\alpha\ln\alpha$, οπότε $M(\alpha+\alpha\ln\alpha, 0)$.

Οπότε η τετμημένη του M ως συνάρτηση του χρόνου είναι: $x(t)=\alpha(t)+\alpha(t)\ln\alpha(t)$.

Επειδή τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0)=e$ έχουμε ότι

$x'(t)=\alpha'(t)+\alpha'(t)\ln\alpha(t)+\alpha(t)\dfrac{1}{\alpha(t)}\alpha'(t)=\alpha'(t)\left[2+\ln\alpha(t)\right]$ και

$x'(t_0)=\alpha'(t_0)\left[2+\ln\alpha(t_0)\right]=2(2+\ln e)=6cm/s$

ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ !

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Καψαλιάρης Στέλιος
Σιταρίδης Σπύρος