Απαντήσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών Β΄Λυκείου

4 Νοεμβρίου 2018

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας σελ. 33

Α2. Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας σελ. 36

Α3. Σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Προσανατολισμού σελ. 33

Α4.

i. Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα Β

Β1.

i)

i. – α) **ii. – ζ)** **iii. – γ)** **iv. – ε)** **v. - στ)**

ii)

α) $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{\Delta\Gamma}}\right)=90^o$ **δ)** $\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma A},\overrightarrow{\Delta\Gamma}}\right)=135^o$

β) $\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta\Gamma},\overrightarrow{AB}}\right)=0^o$ **ε)** $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right)=90^o$

γ) $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{\Gamma B}}\right)=180^o$ **στ)** $\left(\widehat{\overrightarrow{B\Delta},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)=45^o$

Β2. Έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}\right)-\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}-\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=\left(13\vec{\alpha}+7\vec{\beta}+10\vec{\gamma}\right)-\left(5\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}\right)=13\vec{\alpha}+7\vec{\beta}+10\vec{\gamma}-5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}-4\vec{\gamma}=8\vec{\alpha}+4\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$$

Ισχύει ότι :

$$8\vec{\alpha}+4\vec{\beta}+6\vec{\gamma}=2\left(4\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}\right)\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}//\overrightarrow{AB}$$

και επειδή Β κοινό άκρο των διανυσμάτων $\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{AB}$, τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Θέμα Γ

Γ₁.:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2}+\frac{y+1}{4}+\frac{1}{2}=0 \\ \frac{x+1}{3}-\frac{y+5}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10+y+1+2=0 \\ 2x+2-3y-15=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-3y=19 \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=7 \\ -2x+3y=-19 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $4y=-12 \Leftrightarrow y=-3$

$2x+y=7 \Leftrightarrow 2x-3=7 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$

Άρα λύση του συστήματος είναι η $(x,y)=(5,-3)$

Γ₂.

$(y-x)^2+(8-x^2-y^2)^2=0 \Leftrightarrow (y-x)^2=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad (8-x^2-y^2)^2=0 \Leftrightarrow$

$y-x=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad 8-x^2-y^2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y-x=0 \\ 8-x^2-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 8-x^2-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2x^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

Άρα τα ζεύγη (x,y) για τα οποία ισχύει η ισότητα είναι $(x,y)=(2,2)$ **,**
$(x,y)=(-2,-2)$

Γ₃. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-2)x+5y=5 \\ x+(\lambda+2)y=5 \end{cases}$

i. Για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει:

$$D\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)-5\neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-4-5\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-9\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda\neq -3$$

ii. Για $\lambda\neq 3 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda\neq -3$ έχουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \lambda+2 \end{vmatrix}=5(\lambda+2)-25=5\lambda+10-25=5\lambda-15=5(\lambda-3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=5(\lambda-2)-5=5\lambda-10-5=5\lambda-15=5(\lambda-3)$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}=\frac{5}{(\lambda+3)}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{5(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}=\frac{5}{(\lambda+3)}$$

Άρα λύση του συστήματος είναι η $(x_0,y_0)=\left(\frac{5}{\lambda+3},\frac{5}{\lambda+3}\right)$

iii. Έχουμε:

$$x_0^2 + y_0^2 = 50 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{\lambda+3}\right)^2 + \left(\frac{5}{\lambda+3}\right)^2 = 50 \Leftrightarrow \frac{25}{(\lambda+3)^2} + \frac{25}{(\lambda+3)^2} = 50 \Leftrightarrow \frac{50}{(\lambda+3)^2} = 50 \Leftrightarrow$$

$$50(\lambda+3)^2 = 50 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\lambda+3=1 \;\; ή \;\; \lambda+3=-1\right) \Leftrightarrow \left(\lambda=-2 \;\; ή \;\; \lambda=-4\right)$$

Θέμα Δ

i. Αν οι συντεταγμένες του Α είναι (x_A, y_A) τότε

- $x_B - x_A = -3 \Leftrightarrow x_A = x_B + 3 = -1 + 3 = 2$
- $y_B - y_A = 4 \Leftrightarrow y_A = y_B - 4 = 2 - 4 = -2$

Άρα $A(2,-2)$

ii. Αν οι συντεταγμένες του μέσου Μ είναι (x_M, y_M) τότε

- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$
- $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$

Άρα $M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Οπότε

$$\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

iii. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το μηδενικό οπότε:

- $\lambda^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 7 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda = \sqrt{7}$ και
- $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1 (απορρίπτεται) \;\; ή \;\; \kappa = 2$

Έχουμε: $(\kappa+\lambda)^2 = \left(2+\sqrt{7}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{7} + 7 = 11 + 4\sqrt{7}$

iv. $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{MB} \overset{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}, αντίθετα}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow (-3,4) = \left(\lambda^2 - 7, \kappa^2 - \kappa - 2\right)$$

Από την ισότητα των διανυσμάτων έχουμε:

- $\lambda^2 - 7 = -3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda = 2$ και
- $\kappa^2 - \kappa - 2 = 4 \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - 6 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2 (απορρίπτεται) \;\; ή \;\; \kappa = 3$

v. Το σημείο Ε είναι σημείο του χ΄χ, άρα η τεταγμένη του είναι ίση με 0, οπότε είναι της μορφής $\mathrm{E}\left(x_E,0\right)$ οπότε $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\left(x_{\mathrm{E}}+1,-2\right)$.

Για να είναι τα σημεία Α,Β,Ε συνευθειακά, έχουμε:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BE}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-3 & 4\\ x_{\mathrm{E}}+1 & -2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 6-4x_{\mathrm{E}}-4=0\Leftrightarrow 4x_{\mathrm{E}}=2\Leftrightarrow x_{\mathrm{E}}=\frac{1}{2}$$

Άρα $\mathrm{E}\left(\frac{1}{2},0\right)$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Καμπερίδης Χαράλαμπος
Καψαλιάρης Στέλιος
Σιταρίδης Σπύρος
Χωνιανάκης Αντώνης