Μαθηματικά Β Λυκείου

4 Ιανουαρίου 2019

Θέμα Α

A_1. Σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Προσανατολισμού σελ. 41

A_2. Σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Προσανατολισμού σελ. 43

A_3. Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας σελ. 60

A_4.

i. Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα Β

B_1.

i. – (ζ) **ii. – (ε)** **iii. – (η)** **iv. – (δ)** **v. - (β)**

B_2.

i. – (β) **ii. – (α)**

B_3.

i. $\eta\mu(210^o) = \eta\mu(180^o + 30^o) = -\eta\mu(30^o) = -\frac{1}{2}$

$\varepsilon\varphi(135^o) = \varepsilon\varphi(180^o - 45^o) = -\varepsilon\varphi(45^o) = -1$

Οπότε $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^3 + x^{-1} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{1}{x}}$

ii. *α) λόγω του παρονομαστή πρέπει :* $x \neq 0$ *άρα* $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β)για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ *με :*

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow {x_1}^3 < {x_2}^3 \overset{-\frac{1}{2}<0}{\Longleftrightarrow} -\frac{1}{2}\cdot {x_1}^3 > -\frac{1}{2}\cdot {x_2}^3$
- $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

$$-\frac{1}{2}\cdot {x_1}^3 + \frac{1}{x_1} > -\frac{1}{2}\cdot {x_2}^3 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Θέμα Γ

i. $(\boldsymbol{A\Gamma}) = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$, άρα $|\overrightarrow{A\Gamma}| = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{\sqrt{3}})$, άρα $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\sigma\upsilon\nu(150^o) = \sigma\upsilon\nu(180^o - 30^o) = -\sigma\upsilon\nu 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = \boldsymbol{2\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu(\boldsymbol{150^o}) =$$

$$= \boldsymbol{2\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{4\cdot(\sqrt{3})^2}{2} = -6$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = -6$$

ii. Μ μέσο της ΒΓ οπότε από Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος έχουμε:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2} \quad (1)$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}| = \left|\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right|$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}|^2 = \left|\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right|^2 = \left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left[(\overrightarrow{AB})^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + (\overrightarrow{A\Gamma})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + |\overrightarrow{A\Gamma}|^2\right] = \frac{1}{4}\cdot\left[2^2 + 2\cdot(-6) + (2\sqrt{3})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot[4 - 12 + 12] = 1$$

Οπότε $|\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}|^2 = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}| = \sqrt{1} \Leftrightarrow |\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}| = 1$

iii. Για να βρώ το είδος των γωνιών αρκεί να βρώ το πρόσημο των εσωτερικών γινομένων.

- Για τη γωνία $\boldsymbol{B\hat{A}M}$ θα πάρω το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\left(|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(2^2 + (-6)) = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1 < 0$$

Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ είναι αμβλεία.

- Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}M$ θα πάρω το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-6+\left(2\sqrt{3}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\cdot(-6+12)=+3>0$$

Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{AM}$ είναι οξεία.

iv. Για να βρούμε εξίσωση ευθείας χρειαζόμαστε συντελεστή διεύθυνσης και ένα σημείο. Έστω $(\varepsilon): y-y_0=\lambda_\varepsilon(x-x_0)$

- Το σημείο μας είναι το Α(-1,4) άρα $x_0=-1 \quad \kappa\alpha\iota \;\; y_0=4$
- Τον συντελεστή διεύθυνσης θα τον πάρουμε απο το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$

$$(\varepsilon)\parallel\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\lambda_{AB}\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\frac{y_{AB}}{x_{AB}}\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{1}\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\sqrt{3}$$

Οπότε $(\varepsilon): y-4=\sqrt{3}(x+1)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x+4+\sqrt{3}$

Θέμα Δ

i. Για να αποδείξω την παράσταση $\boldsymbol{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\frac{1}{\sigma\varphi^2\alpha}=1}$ ξεκινάω απο το 1ο μέρος

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\frac{1}{\sigma\varphi^2\alpha}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\frac{1}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{1-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=$$
$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=1$$

ii. Απο το 1ο ερώτημα γνωρίζω ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\frac{1}{\sigma\varphi^2\alpha}=1$ άρα και $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{5}}-\frac{1}{\sigma\varphi^2\frac{\pi}{5}}=1$

- Η f έχει περίοδο $T=6\pi\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\omega}=6\pi\Leftrightarrow 6\omega=2\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{3}$ **(1)**
- *Με αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο έχουμε:*
  $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}+\omega x\right)=\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\omega x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega x\right)=\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ **(2)**
- *Άρα* $\boldsymbol{f(x)=\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{5}}-\frac{1}{\sigma\varphi^2\frac{\pi}{5}}\right)+\alpha\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}+\omega x\right)}\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(x)=1+\alpha\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ **(3)**
- Και διέρχεται απο το σημείο Α(3π,3) οπότε
  $f(3\pi)=3\Leftrightarrow 1+\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{3}3\pi\right)=3\Leftrightarrow 1+\alpha\sigma\upsilon\nu(\pi)=3\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 1+\alpha(-1)=3\Leftrightarrow\alpha=1-3\Leftrightarrow\alpha=-2$
  (3) $\Leftrightarrow f(x)=1-2\sigma\upsilon\nu(\frac{x}{3})$

iii. Η $f(x) = 1 - 2συν(\frac{x}{3})$ δεν έχει κάποιον περιορισμό άρα $A_f = \Re$

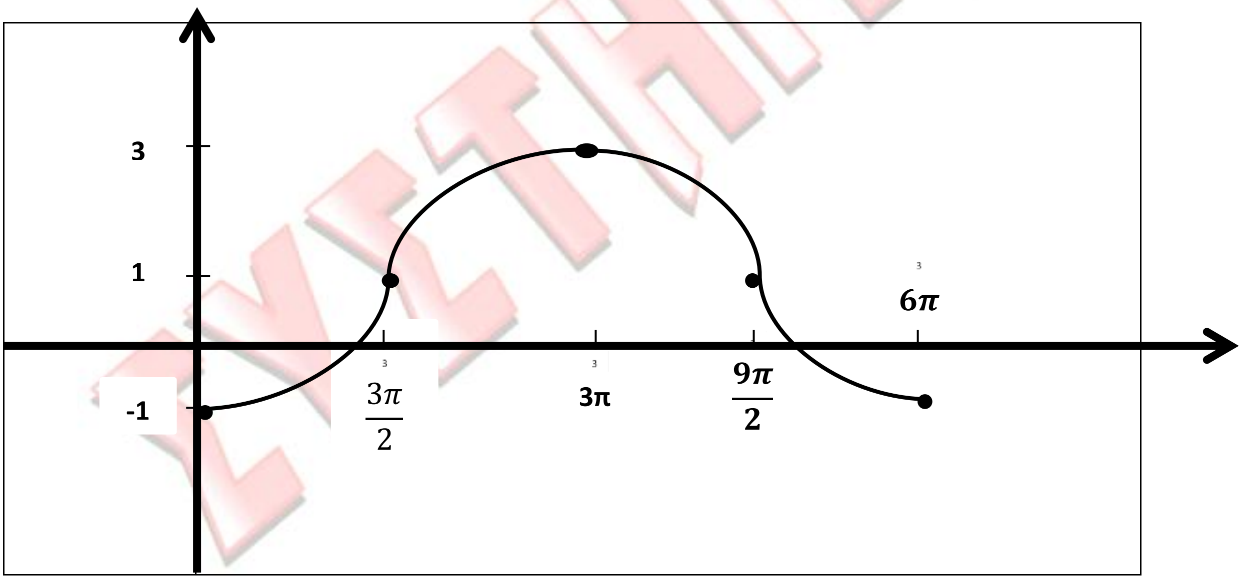
- Για κάθε $x \in A_f \;\; και \;\; -x \in A_f$
- $f(-x) = 1 - 2συν\left(\frac{-x}{3}\right) = 1 - 2συν\left(-\frac{x}{3}\right) = 1 - 2συν\left(\frac{x}{3}\right) = f(x)$

  f άρτια ,έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.

iv. *Με* $f(x) = 1 - 2συν\left(\frac{x}{3}\right)$

$$κ = 1 \quad και \quad ρ = -2$$
$$f_{max} = κ + |ρ| = 1 + 2 = 3$$
$$f_{min} = κ - |ρ| = 1 - 2 = -1$$

	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
	κ+ρ	κ	κ-ρ	κ	κ+ρ
$f(x)$	-1	1	3	1	-1



v. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\frac{9\pi}{2}, 6π)$

οι τιμές 5π και $\frac{11\pi}{2}$ ανήκουν σε αυτό το διάστημα οπότε:

$5π < \frac{11\pi}{2} \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(5\pi) > f(\frac{11\pi}{2})$.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Καμπερίδης Χαράλαμπος
Καψαλιάρης Στέλιος
Σιταρίδης Σπύρος
Χωνιανάκης Αντώνης