Απαντήσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών Β΄ Λυκείου

3 Νοεμβρίου 2019

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας σελ. 35

Α2. Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας σελ. 32

Α3. Σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Προσανατολισμού σελ. 38

Α4.

i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα Β

Β.

i.

$$\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\lambda^2-2\lambda,\lambda^2-4\right)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\lambda^2-2\lambda=0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \lambda^2-4=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda(\lambda-2)=0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ (\lambda-2)(\lambda+2)=0\right)\Leftrightarrow\left(\left(\lambda=0\ \ \acute{\eta}\ \ \lambda=2\right)\kappa\alpha\iota\left(\lambda=2\ \ \acute{\eta}\ \ \lambda=-2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\lambda=2$$

ii. Πρέπει:

- $\vec{\alpha}\neq\vec{0}\Leftrightarrow\lambda\neq 2$
- $\vec{\alpha}\,//\,x'x\Leftrightarrow\lambda^2-4=0\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda+2)=0\Leftrightarrow\lambda=2\ \ \acute{\eta}\ \ \lambda=-2$

Άρα $\lambda=-2$

iii. $$\left|\vec{\beta}\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda+1)^2+\lambda^2}=1\Leftrightarrow 2\lambda^2+2\lambda+1=1\Leftrightarrow 2\lambda\left(\lambda+1\right)=0\Leftrightarrow\left(\lambda=0\ \ \acute{\eta}\ \ \lambda=-1\right)$$

iv.

$$\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\Leftrightarrow\left(\lambda^2-2\lambda,\lambda^2-4\right)=(3,5)\Leftrightarrow\left(\left(\lambda^2-2\lambda=3\right)\kappa\alpha\iota\left(\lambda^2-4=5\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\left(\lambda^2-2\lambda-3=0\right)\kappa\alpha\iota\left(\lambda^2=9\right)\right)\Leftrightarrow\left(\left(\lambda=3\ \ \acute{\eta}\ \ \lambda=-1\right)\kappa\alpha\iota\left(\lambda=3\ \ \acute{\eta}\ \ \lambda=-3\right)\right)\Leftrightarrow\lambda=3$$

v. $$\beta\,//\,\gamma\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda+1 & \lambda\\ 3 & 5\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 5\left(\lambda+1\right)-3\lambda=0\Leftrightarrow 5\lambda+5-3\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda=-5\Leftrightarrow\lambda=-\frac{5}{2}$$

Θέμα Γ

Γ1.

i. $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y=10 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $5x=15 \Leftrightarrow x=3$

$x+y=5 \Leftrightarrow 3+y=5 \Leftrightarrow y=2$

άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3,2)$

ii. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=-\dfrac{2}{x} \end{cases}, x\neq 0 \quad \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota} \quad xy=-2\neq 0$

$$x^2+y^2=5 \Leftrightarrow x^2+\left(-\frac{2}{x}\right)^2=5 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=5 \Leftrightarrow x^4+4=5x^2 \Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0$$

θέτω $x^2=\omega\geq 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2-5\omega+4=0$

- $\omega_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$
  - Για $x=2, \quad y=-\dfrac{2}{x}=-1$
  - Για $x=-2, \quad y=-\dfrac{2}{x}=1$
- $\omega_2=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$
  - Για $x=1, \quad y=-\dfrac{2}{x}=-2$
  - Για $x=-1, \quad y=-\dfrac{2}{x}=2$

Άρα λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη: $(2,-1),(-2,1),(1,-2),(-1,2)$

Γ2.

$$\begin{cases} (\lambda-1)x+\lambda y=-2 \\ \lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-1 \end{cases}$$

i. $x^2-(D+5)x+4(D+1)=0$

Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, άρα:

$\Delta=0 \Leftrightarrow \left[-(D+5)\right]^2-4\cdot 1\cdot 4(D+1)=0 \Leftrightarrow D^2+10D+25-16D-16=0 \Leftrightarrow D^2-6D+9=0 \Leftrightarrow$

$(D-3)^2=0 \Leftrightarrow D-3=0 \Leftrightarrow D=3$

$$x_0=-\frac{-(D+5)}{2} \overset{D=3}{=} 4$$

ii. $D=3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}=3 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2-\lambda^2=3 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1-\lambda^2=3 \Leftrightarrow -2\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=-1$

Για $\lambda=-1$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}-2x=-2\\ -x-2y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ -1-2y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

Γ3

i. Πεδίο ορισμού: $A_f=[-4,4]$

ii. f γνησίως αύξουσα στο $[-4,-1]$

f γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$

f γνησίως αύξουσα στο $[1,4]$

iii. Επειδή f περιττή, για κάθε $x\in A_f$ ισχύει: $f(-x)=-\mathrm{f(x)} \Leftrightarrow -f(-x)=f(x)$.

Οπότε έχουμε:

- $f(4)=-f(-4)=-(-1)=1$
- $f(-1)=-f(1)=-(-2)=2$

iv. Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=2$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-2$

<u>Θέμα Δ</u>

i. $\overrightarrow{AB}=(-1-1,1-4)=(-2,-3)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(3-1,1-4)=(2,-3)$

$\overrightarrow{B\Gamma}=(3-(-1),1-1)=(4,0)$

ii. $\lambda_{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$

$\lambda_{\overrightarrow{A\Gamma}}=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$\lambda_{\overrightarrow{AB}}\neq\lambda_{\overrightarrow{A\Gamma}}$, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά.

Επομένως τα σημεία Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά και ορίζουν κορυφές τριγώνου

iii. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}$

Παρατηρούμε ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$, οπότε για οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ

iv. Έστω $M(x_M, y_M)$ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

$x_M=\dfrac{(-1)+3}{2}=1$, $y_M=\dfrac{1+1}{2}=1$

άρα $M(1,1)$

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ είναι η ΑΜ η οποία έχει μέτρο:

$(AM)=\sqrt{(1-1)^2+(1-4)^2}=3$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Καψαλιάρης Στέλιος
Κοντογιάννης Στέργιος
Τζιώρτζης Μιχάλης
Χωνιανάκης Αντώνης