ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ-ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
3-5-2019

ΘΕΜΑ Α

Α.1. σχολικό βιβλίο σελ 175 (άλγεβρα)
Α.2.σχολικό βιβλίο σελ.83 (προσανατολισμού)
Α.3. i)Σ **ii)**Λ **iii)**Σ **iv) Λ** **v)Λ**

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\ln x + \ln(x^2-4x+4)$

i) Πρέπει: $x>0$ και $x^2-4x+4>0 \Rightarrow (x-2)^2>0 \Rightarrow x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$ συνεπώς $D_f=(0,2)\cup(2,+\infty)$

ii)Για y=0 έχουμε $0=\ln x + \ln(x^2-4x+4) \Leftrightarrow \ln[x(x^2-4x+4)]=0 \Leftrightarrow \ln[x(x^2-4x+4)]=\ln 1 \Leftrightarrow$

$x(x^2-4x+4)=1 \Leftrightarrow x^3-4x^2+4x-1=0$ από σχήμα Horner προκύπτει

$(x-1)(x^2-3x+1)=0 \Rightarrow x-1=0$ ή $x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=1$ ή $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. άρα τα σημεία τομής της C_f με τον x'x είναι

τα $(1,0),\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},0\right),\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

iii)Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον y'y, βάζουμε x=0. αυτό όμως δεν επιτρέπεται στην περίπτωσή μας αφού $0\notin D_f=(0,2)\cup(2,+\infty)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η C_f δεν έχει σημεία τομής με τον y'y.

iv) $f(x)=2-\ln\frac{e^2}{3} \Leftrightarrow$

$$\ln x + \ln\left(x^2-4x+4\right)=2-\ln\frac{e^2}{3} \Leftrightarrow \ln[x\left(x^2-4x+4\right)]=\ln e^2-(\ln e^2-\ln 3) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x^3-4x^2+4x\right)=\ln e^2-\ln e^2+\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(x^3-4x^2+4x\right)=\ln 3 \Leftrightarrow x^3-4x^2+4x=3 \Leftrightarrow$$

$$x^3-4x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow x=3$$

δεκτή λύση.

ΘΕΜΑ Γ

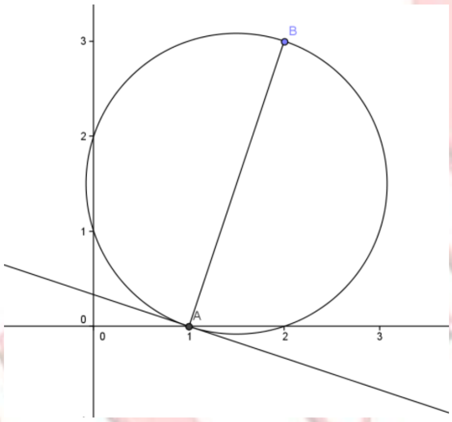
i) Το μέσο Μ του ΑΒ είναι το κέντρο του (c) με $x_M=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ και $y_M=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$, δηλ. $M(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.

Η ακτίνα είναι $\rho=\frac{(AB)}{2}=\frac{\sqrt{(1-2)^2+(0-3)^2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. Οπότε η εξίσωση του κύκλου (c) είναι:

$(c):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{3-0}{2-1}=3$ και επειδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ΑΒ

ισχύει ότι $\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{1}{3}$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Α είναι

(ε_A): $y=-\frac{1}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$



ii) Έστω ε: y=λx+β η ζητούμενη ευθεία ή ε: -λx+y-β=0

$A(1,0)\in\varepsilon\Rightarrow 0=\lambda+\beta\Rightarrow\beta=-\lambda\quad(1)$

$d(B,\varepsilon)=1\Leftrightarrow\frac{|-2\lambda+3-\beta|}{\sqrt{(-\lambda)^2+1^2}}=1\Leftrightarrow|-2\lambda+3-\beta|=\sqrt{(-\lambda)^2+1^2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}|-\lambda+3|=\sqrt{\lambda^2+1^2}\Leftrightarrow$

$(\lambda-3)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow\lambda=\frac{4}{3}$

iii) Από τη σχέση (1)⇒ $\beta=-\frac{4}{3}$, άρα ε: $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\Leftrightarrow 4x-3y-4=0$

Η ακτίνα του κύκλου (C_1) είναι: $\rho_1=d(K,\varepsilon)=\frac{|4\cdot2-3\cdot(-2)-4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$, οπότε (C_1): $(x-2)^2+(y+2)^2=4$.

iv) Στο ερώτημα (ii)υποθέσαμε ότι η ευθεία ε, που αναζητούμε έχει συντελεστή διεύθυνσης, υπάρχει όμως και η περίπτωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το Α(1,0) η ευθεία x=1, η οποία απέχει και αυτή από το Β(2,3) απόσταση ίση με 1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

- για την f:

$5^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5^x \geq 1 \Leftrightarrow 5^x \geq 5^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$\kappa\alpha\iota \ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \frac{1}{8} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$

$x \geq 0$ και $x \leq 2$, *συνεπώς* $D_f = [0,2]$

- για την g:

$2^{2x} - 9\cdot 2^x + 8 \neq 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 9\cdot 2^x + 8 \neq 0$, θέτω $\omega = 2^x$, *άρα* έχουμε:

$\omega^2 - 9\omega + 8 \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq 1$ και $\omega \neq 8 \Leftrightarrow 2^x \neq 1$ *και* $2^x \neq 8 \Rightarrow 2^x \neq 2^0$ και $2^x \neq 2^3 \Leftrightarrow x \neq 0$ *και* $x \neq 3$

συνεπώς $D_g = (-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$

Δ.2. α)

i) Για να είναι η συνάρτηση h, γνησίως αύξουσα, πρέπει $1+\frac{1}{\mu} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} > 0 \Leftrightarrow 1\mu > 0 \Leftrightarrow \mu > 0$ δηλ.

$\mu \in (0,+\infty)$

ii) Για να είναι η συνάρτηση h, γνησίως φθίνουσα, πρέπει

$0 < 1+\frac{1}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \ (0 < 1+\frac{1}{\mu}$ και $1+\frac{1}{\mu} < 1) \Leftrightarrow (0 < \frac{\mu+1}{\mu}$ και $\frac{1}{\mu} < 0) \Leftrightarrow$

$(0<\mu(\mu+1)$ και $1\mu < 0) \Leftrightarrow$

	-00	-1	0	+00
μ	-	-	0	+
μ+1	-	0 +		+
μ(μ+1)	+	0 -	0	+

$\Leftrightarrow (\mu \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ και $\mu < 0)$, συνεπώς $\mu \in (-\infty,-1)$

β) Για μ=3, η εξίσωση $64\cdot h(2|x|-7)=27$ γίνεται

$$64\cdot h(2|x|-7) = 27 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{3}\right)^{2|x|-7} = \frac{27}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2|x|-7} = \frac{3^3}{4^3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2|x|-7} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2|x|-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow 2|x|-7 = -3 \Leftrightarrow 2|x| = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καμπερίδης Χαράλαμπος
Καψαλιάρης Στέλιος
Σιταρίδης Σπύρος
Χωνιανάκης Αντώνης