ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β ΛΥΚΕΙΟΥ 3 - 3 - 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου Μαθηματικών Προσανατολισμού, σελ. 67.

Α2. **1.** Γ **2.** Β **3.** Δ **4.** Γ

Α3. **1.** Λ **2.** Λ **3.** Σ **4.** Σ **5.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{-2-0} = -\frac{1}{2}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας (ε_1) είναι

(ε_1): $y - 2 = -\frac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$.

Για y=0 η εξίσωση δίνει $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, συνεπώς η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο (4,0).

Β2. Αφού $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ ισχύει ότι $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{2}$. Η (ε_2) επίσης διέρχεται από το σημείο Γ(1, -2) οπότε

$(\varepsilon_2): y + 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y + 2 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y + 4 = -x + 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3 = 0$.

Β3. **α)** Είναι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|0 + 2\cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.

β) Έστω Μ(x,y) οποιοδήποτε σημείο της μεσοπαράλληλης ευθείας (ε). Τότε

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|x + 2y + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Leftrightarrow |x + 2y - 4| = |x + 2y + 3| \Leftrightarrow$$

$x + 2y - 4 = x + 2y + 3$(αδυν.) ή $x + 2y - 4 = -x - 2y - 3 \Leftrightarrow 2x + 4y - 1 = 0$

Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης (ε) είναι: $2x + 4y - 1 = 0$.

Β4. Είναι $\overrightarrow{OA} = (0,2)$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = (1,-2)$ οπότε $(AO\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right\| = |-2| = 2$τ.μ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x - 1$ είναι ίσο με P(1) οπότε $P(1) = P(3) - 144$ (1)

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x - 3$ είναι ίσο με P(3) οπότε $P(3) = 96 - P(1)$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\begin{cases} P(1)=P(3)-144 \\ P(3)=96-P(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1)=P(3)-144 \\ P(3)=96-P(3)+144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1)=P(3)-144 \\ 2P(3)=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1)=-24 \\ P(3)=120 \end{cases}$$

β) $\begin{cases} P(1)=-24 \\ P(3)=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^4+\alpha\cdot 1^3-1^2-16+\beta=-24 \\ 3^4+\alpha\cdot 3^3-3^2-16\cdot 3+\beta=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-8 \\ 27\alpha+\beta=96 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \beta=-\alpha-8 \\ 27\alpha-\alpha-8=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\alpha-8 \\ 26\alpha=104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-12 \\ \alpha=4 \end{cases}$$

γ) Επειδή οι αριθμοί 5, -5, 7 δεν είναι διαιρέτες του σταθερού όρου -12 του P(x) δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου P(x) οπότε $P(5)\neq 0$, $P(-5)\neq 0$ και $P(7)\neq 0$. Άρα $P(5)\cdot P(-5)\cdot P(7)\neq 0$.

Γ2. **α)** Για α=4 και β=-12 έχουμε ότι $P(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του P(x) είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ του σταθερού όρου -12.

Επειδή P(-1)=0 έχουμε ότι:

1	4	-1	-16	-12	-1
	-1	-3	4	12	
1	3	-4	-12	**0**	

Άρα P(x)= $(x+1)(x^3+3x^2-4x-12)=(x+1)Q(x)$

Επειδή $Q(2)=0$ έχουμε ότι:

1	3	-4	-12	2
	2	10	12	
1	5	6	**0**	

Άρα $P(x)=(x+1)(x-2)(x^2+5x+6)=(x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+2)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=2$ ή $x=-2$ ή $x=-3$

β) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=16x+12$ όταν

$f(x)>16x+12 \Leftrightarrow x^4+4x^3-x^2-16x-12>0 \Leftrightarrow P(x)>0$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		2		$+\infty$
x+1		-		-		-	0	+		+	
$x-2$		-		-		-		-	0	+	
x+2		-		-	0	+		+		+	
x+3		-	0	+		+		+		+	
P(x)		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Επομένως $x\in(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στην (ε_1) για y=0 προκύπτει x=1, δηλαδή σημείο της (ε_1) είναι το Α(1,0). Οπότε

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow d(A,\varepsilon_2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{|2+\alpha|}{\sqrt{4+\beta^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2|2+\alpha|=\sqrt{4+\beta^2}\Leftrightarrow 4(2+\alpha)^2=4+\beta^2 \quad (1)$$

Επίσης $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon 1}=\lambda_{\varepsilon 2}\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha}=-\frac{2}{\beta}\Leftrightarrow \beta=2\alpha \quad (2)$ Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2)

$$\begin{cases}4(2+\alpha)^2=4+\beta^2\\ \beta=2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(4+4\alpha+\alpha^2)=4+4\alpha^2\\ \beta=2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+4\alpha+\alpha^2=1+\alpha^2\\ \beta=2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3/4\\ \beta=-3/2\end{cases}$$

Δ2. Για $\alpha=-\frac{3}{4}$ και $\beta=-\frac{3}{2}$ έχουμε ότι:

$(\varepsilon_1): x-\frac{3}{4}y-1=0\Leftrightarrow 4x-3y-4=0$ και $(\varepsilon_2): 2x-\frac{3}{2}y-\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow 8x-6y-3=0$ με $\lambda_{\varepsilon 1}=\lambda_{\varepsilon 2}=\frac{4}{3}$

Αφού η ζητούμενη ευθεία (η) είναι παράλληλη με τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι της μορφής $4x-3y+k=0$.

Για x=0 προκύπτει $y=\frac{k}{3}$ και για y=0 προκύπτει $x=-\frac{k}{4}$, δηλαδή τέμνει τον $x'x$ στο $M\left(-\frac{k}{4},0\right)$

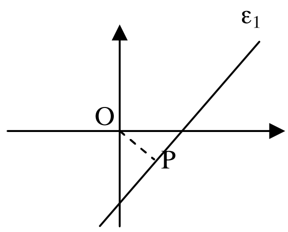
και τον $y'y$ στο $N\left(0,\frac{k}{3}\right)$.Συνεπώς $(OMN)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\right|=\frac{1}{6}\Leftrightarrow \left\|\begin{matrix}-k/4 & 0\\ 0 & k/3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\frac{k^2}{12}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow k^2=4\Leftrightarrow k=2$ ή $k=-2$. Άρα (η): $4x-3y+2=0$ ή $(\eta): 4x-3y-2=0$.

Δ3. Αν $OP\perp\varepsilon_1$ τότε το P είναι το πλησιέστερο σημείο της (ε_1) στο O(0,0).

Είναι $\lambda_{\varepsilon 1}\cdot\lambda_{OP}=-1\Leftrightarrow \lambda_{OP}=-\frac{3}{4}$. Άρα $(\varepsilon_{OK}): y=-\frac{3}{4}x$

$$\begin{cases}3x+4y=0\\ 4x-3y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}x=16/25\\ y=-12/25\end{cases}, \text{ δηλ. } P\left(\frac{16}{25},-\frac{12}{25}\right)$$



Δ4. Έστω $(\zeta)//(\varepsilon_1)$. Τότε $\lambda_\zeta=\lambda_1\Leftrightarrow \frac{7-3\sigma\upsilon\nu\theta}{3\eta\mu\theta}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 7-3\sigma\upsilon\nu\theta=4\eta\mu\theta\Leftrightarrow 4\eta\mu\theta+3\sigma\upsilon\nu\theta=7$.

Όμως $0<\eta\mu\theta<1\Leftrightarrow 0<4\eta\mu\theta<4$ και $0<\sigma\upsilon\nu\theta<1\Leftrightarrow 0<3\sigma\upsilon\nu\theta<3$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη $0<4\eta\mu\theta+3\sigma\upsilon\nu\theta<7$. Άρα (ζ) δεν είναι παράλληλη με (ε_1).

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές
Καμπερίδης Χαράλαμπος
Καψαλιάρης Στέλιος
Σιταρίδης Σπύρος
Χωνιανάκης Αντώνης