ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ
06/04/2019

Θέμα 1

Α. Σχολικό βιβλίο σελ. 106

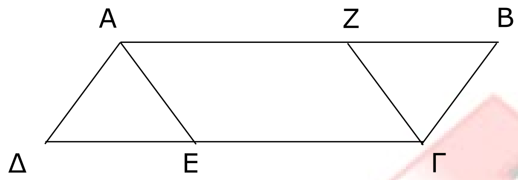
Β. Σχολικό βιβλίο σελ. 42

Γ. Σχολικό βιβλίο σελ. 41,44

Δ. **1: Σ** **2: Λ** **3: Λ** **4: Σ** **5: Λ**

Θέμα 2

Α.



i. $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 120°$.

Έτσι, όταν τις διχοτομώ δημιουργείται μια γωνία $60°$. Επομένως, στο τρίγωνο $A\Delta E$, $\hat{\Delta} = 60°$ και $\hat{A} = 60°$, επομένως από άθροισμα γωνιών τριγώνου πρέπει $\hat{A} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180°$. Άρα $\hat{E} = 60°$.

Ομοίως, στο τρίγωνο ΖΓΒ αποδεικνύεται πως όλες οι γωνίες είναι $60°$.

Τα τρίγωνα αυτά, εφόσον έχουν 3 γωνίες ίσες είναι ισόπλευρα.

Και δεδομένου ότι ΑΔ και ΒΓ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, και άρα ίσες, όλες οι πλευρές των τριγώνων ΑΔΕ, ΖΓΒ είναι ίσες, επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχω αποδείξει πως ΖΒ = ΔΕ, επομένως, εάν από ίσες πλευρές ΑΒ = ΓΔ, αφαιρέσω ίσα τμήματα ΖΒ = ΔΕ, τότε ΑΒ – ΖΒ = ΓΔ – ΔΕ

ή, αλλιώς, ΑΖ = ΕΓ. Έτσι, στο ΑΖΓΕ οι απέναντι πλευρές ΑΖ και ΕΓ είναι ίσες, και παράλληλες, αφού ΑΒ // ΓΔ στο αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

Εφόσον για ένα ζεύγος απέναντι πλευρών ισχύει ότι είναι παράλληλες και ίσες, το ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Για τις γωνίες των τριγώνων έχει αποδειχθεί πως είναι όλες $60°$.

Για τις γωνίες του ΑΖΓΕ:

$$A\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{E}A_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 180° - \Delta\hat{E}A = 180° - 60° = 120°$$
$$\Gamma\hat{Z}A = A\hat{E}\Gamma = 120°$$

Και επειδή οι διαδοχικές γωνίες παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές:

$$E\hat{A}Z = E\hat{\Gamma}Z = 180° - 120° = 60°$$

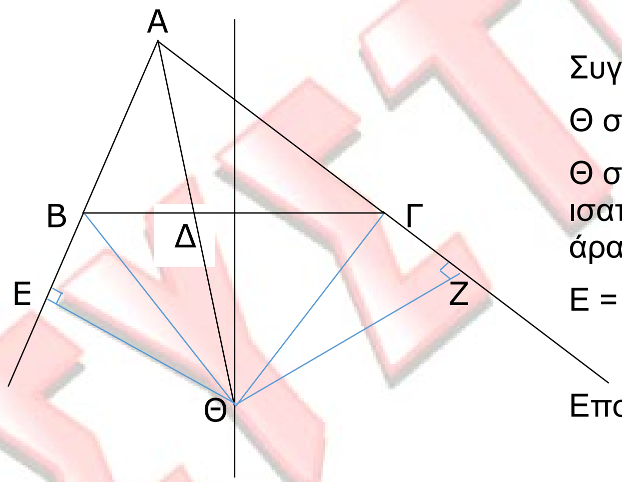
Β.
i. Με χρήση των θεωρημάτων για κατακορυφήν, και εντός εναλλάξ γωνιών προκύπτει πως $2x = 3y$. Επιπρόσθετα, μέσω των ιδιοτήτων προκύπτει πως οι γωνίες 2x (ή 3y) και 2x+3y είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$(2x + 3y) + 3y = 180°$$
$$9y = 180° \quad ή \quad 6x = 180°$$
$$y = 20° \qquad x = 30°$$

ii. Οι γωνίες θ και $\theta_{\varepsilon\xi}$ θα έχουν άθροισμα $180°$, δηλαδή: $\theta + 140° = 180° \Rightarrow \theta = 40°$.
Επομένως η γωνία 2θ θα είναι $2 * 40 = 80°$.
Και από άθροισμα γωνιών τριγώνου προκύπτει $\omega = 60°$.

Θέμα 3

Α.



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΘΕΒ, ΘΓΖ.

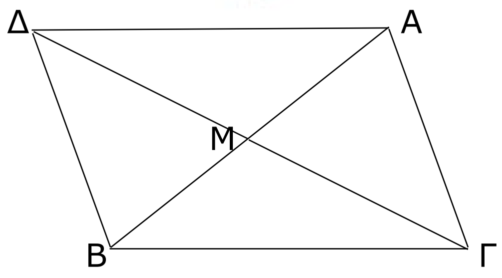
Θ σημείο μεσοκαθέτου της ΒΓ, άρα ΘΒ = ΘΓ.

Θ σημείο της διχοτόμου της Α, επομένως ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας Α (ΑΒ, ΑΓ), άρα ΘΕ = ΘΖ.

Ε = Ζ = 90°.

Επομένως τα τρίγωνα ΘΕΒ και ΘΓΖ είναι ίσα.

Β.

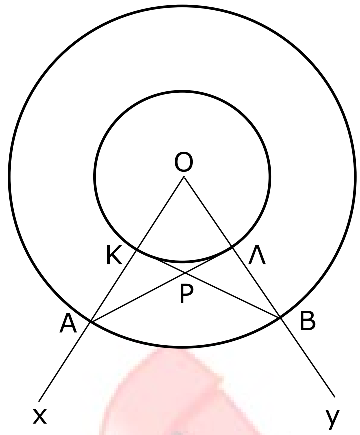


ΓΜ διάμεσος, άρα Μ μέσο της ΑΒ, επομένως ΑΜ = ΒΜ.

Από εκφώνηση ΓΜ = ΜΔ, επομένως στο τετράπλευρο ΑΓΒΔ οι διαγώνιοι διχοτομούνται στο κοινό μέσο Μ.

Έτσι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 4



Α. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ:
$\hat{O}$ κοινή,
ΟΚ = ΟΛ και ΟΑ = ΟΒ ως ακτίνες των δύο κύκλων
Άρα τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα.

Προκύπτει ότι οι πλευρές ΑΛ και ΒΚ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία $\hat{O}$.

Β. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΡ και ΒΛΡ:
ΑΚ = ΒΛ ως διαφορά ίσων τμημάτων ($\rho_2 - \rho_1$)
$\hat{A} = \hat{B}$ αφού ΑΟΛ = ΒΟΚ από το ερώτημα Α
$\widehat{APK} = \widehat{BP\Lambda}$ ως κατακορυφήν γωνίες
Άρα και $\hat{K} = \hat{\Lambda}$ ως διαφορά ίσων γωνιών
Άρα τα τρίγωνα ΑΚΡ και ΒΛΡ είναι ίσα.

Προκύπτει ότι ΑΡ = ΡΒ αφού βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.

Γ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΚΡ και ΟΛΡ:
ΟΚ = ΟΛ ως ακτίνες
ΚΡ = ΛΡ ως πλευρές ίσων τριγώνων από το ερώτημα **Β** αφού βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες $\hat{A} = \hat{B}$
$\widehat{OKP} = \widehat{O\Lambda P}$ ως εξωτερικές γωνίες των ίσων γωνιών $\hat{K}\ και\ \hat{\Lambda}$
Άρα τα τρίγωνα ΟΚΡ και ΟΛΡ είναι ίσα και οι γωνίες $\widehat{KOP}\ και\ \widehat{\Lambda OP}$ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΚΡ και ΛΡ.

Άρα η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{O}$ αφού την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές

Τζιώρτζης Γιάννης

Τζιώρτζης Μιχάλης