ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
21-02-2016
ΥΛΗ: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.4-3.6, 4.1-4.2

ΘΕΜΑ Α

1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135
2. Σχολικό βιβλίο σελ. 128
3. i) Σ ii) Λ iii) Σ iv) Λ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

1. i) ρ=3 και ω=1/2 οπότε έχω $T=\frac{2\pi}{\omega}$=4π και $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu\frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow$ $-3 \leq 3\eta\mu\frac{x}{2} \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq 3$. Άρα η περίοδος της f είναι 4π και έχει μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη το -3.

   ii) ρ=-3 και ω=2 οπότε έχω $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \Leftrightarrow$ $3 \geq -3\sigma\upsilon\nu 2x \geq -3 \Leftrightarrow 4 \geq 1-3\sigma\upsilon\nu 2x \geq -2 \Leftrightarrow 4 \geq g(x) \geq -2$. Άρα η περίοδος της g είναι π και έχει μέγιστη τιμή το 4 και ελάχιστη το -2.

   iii) ρ=2 και ω=3 οπότε έχω $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sigma\upsilon\nu 3x \leq 1 \Leftrightarrow$ $-2 \leq 2\sigma\upsilon\nu 3x \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq 2\sigma\upsilon\nu 3x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq h(x) \leq 1$. Άρα η περίοδος της h είναι $\frac{2\pi}{3}$ και έχει μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη το -3.

2. Για να είναι τα πολυώνυμα ίσα θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα τα εξής:

$$\begin{cases} \delta-1=0 \\ \alpha=1 \\ -\alpha^2=-1 \\ \beta-2=5 \\ \gamma-5=\alpha-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=1 \\ \alpha=1 \\ \alpha^2=1 \\ \beta=7 \\ \gamma=\alpha-2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=1 \\ \alpha=1 \\ \alpha=\pm 1 \\ \beta=7 \\ \gamma=\alpha+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=7 \\ \delta=1 \\ \gamma=1+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=7 \\ \gamma=4 \\ \delta=1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

1.

   i. $(4\eta\mu^2 x-1)(2\sigma\upsilon\nu x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\eta\mu^2 x-1=0 \\ 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\eta\mu^2 x=1 \\ 2\sigma\upsilon\nu x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^2 x=1/4 \\ \sigma\upsilon\nu x=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow$

   $\begin{cases} \eta\mu x=\pm 1/2 \\ \sigma\upsilon\nu x=1/2 \end{cases}$ λύνω ξεχωριστά τις 3 τριγωνομετρικές εξισώσεις που προέκυψαν ημx=1/2 ⇔ ημx=ημ(π/6) ⇔ $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi/6 \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \pi/6 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi/6 \\ x = 2\kappa\pi + 5\pi/6 \end{cases}$, κ∈ Z.

ημx=-1/2 ⇔ ημx=-ημ(π/6) ⇔ ημx=ημ(-π/6) ⇔ $\begin{cases} x = 2\kappa\pi - \pi/6 \\ x = 2\kappa\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x = 2\kappa\pi - \pi/6 \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \pi/6 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x = 2\kappa\pi - \pi/6 \\ x = 2\kappa\pi + 7\pi/6 \end{cases}$, κ∈ Z.

συνx=1/2⇔ συνx=συν(π/3) ⇔ $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi/3 \\ x = 2\kappa\pi - \pi/3 \end{cases}$, κ∈ Z.

ii) Θέτω συνx=ω οπότε έχω $2\omega^2 - 3\omega + 1$=0 οι λύσεις που προκύπτουν είναι ω=1 και ω=1/2, άρα συνx=1⇔ συνx=συν0 ⇔ x=2κπ, κ∈ Z ή συνx=1/2⇔ συνx=συν(π/3) ⇔ x=2κπ$\pm\pi/3$, κ∈ Z.

iii) Με $x \neq \frac{2\kappa\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$ έχουμε $\sqrt{3}\varepsilon\varphi 3x = 3$ ⇔ εφ3x=3/$\sqrt{3}$ ⇔εφ3x=$\sqrt{3}$ ⇔ εφ3x=εφ(π/3)⇔3x=κπ+π/3⇔ $x = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$, κ∈ Z.

2. i) Κάνουμε Horner

1	0	0	0	1	0	-1	ρ=1
	1	1	1	1	2	2	
1	1	1	1	2	2	υ=1	

$x^6 + x^2 - 1 = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2)(x - 1) + 1$

ii) Horner

2	-1	0	4	ρ=-2
	-4	10	-20	
2	-5	10	υ=-16	

$2x^3 - x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - 5x + 10)$-16

ΘΕΜΑ Δ

1. i) P(ρ)=υ άρα P(-2)=$(-2)^4 - (-2)^3 - 3(-2)^2 - 2 + 2 = 16 + 8 - 12 = 12$
ii) Για να είναι παράγοντας θα πρέπει P(2)=0, άρα P(2)=$2^4 - 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 2$= 16-8-12+4=0.
Άρα το x-2 είναι παράγοντας του P(x)

iii) Θα κάνουμε Horner

1	-1	-3	1	2	ρ=2
	2	2	-2	-2	
1	1	-1	-1	0	

$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$=$(x^3 + x^2 - x - 1)$(x-2)=$[x^2(x+1) - (x+1)]$(x+2)=(x+1)$(x^2 - 1)$(x+2)
=(x+1)(x+1)(x-1)(x+2)=$(x+1)^2(x-1)(x+2)$
Άρα οι λύσεις του πολυωνύμου είναι τα $\pm1, -2$.

2. Έστω το 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο P(x)=α$x^2 + \beta x + \gamma \;\Rightarrow$
$[P(x)]^2 = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 = \alpha^2 x^4 + 2\alpha\beta x^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2)x^2 + 2\beta\gamma x + \gamma^2$
$[P(x)]^2 = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$
Άρα αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα θα είναι και τα δεύτερα

$$\begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -2 \\ 2\alpha\gamma + \beta^2 = 5 \\ 2\beta\gamma = -4 \\ \gamma^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm1 \\ \alpha\beta = -1 \\ 2\alpha\gamma + \beta^2 = 5 \\ \beta\gamma = -2 \\ \gamma = \pm2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\nu\ \alpha = 1\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \beta = -1, \gamma = 2 \rightarrow P(x) = x^2 - x + 2 \\ \alpha\nu\ \alpha = -1\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \beta = 1, \gamma = -2 \rightarrow P(x) = -x^2 + x - 2 \end{cases}$$

3. $\frac{2x+18}{x^2+2x-3}$ το κλάσμα ορίζεται για $\neq 1, x \neq -3$, οπότε έχουμε $\frac{2x+18}{(x+3)(x-1)} = \frac{a}{x+3} + \frac{\beta}{x-1}$

Και κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών $2x+18 = (x-1)a + (x+3)\beta \Leftrightarrow 2x+18 = \alpha x - a + \beta x + 3\beta \Leftrightarrow$

$2x+18 = (a+\beta)x - a + 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -\alpha + 3\beta = 18 \end{cases}$ προσθέτω κατα μέλη και έχω $4\beta = 20 \Leftrightarrow \beta = 5$ άρα α=-3

Τελικώς θα έχουμε $\frac{2x+18}{(x+3)(x-1)} = -\frac{3}{x+3} + \frac{5}{x-1}$

Τις απαντήσεις του διαγωνίσματος επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί :

Νίκου Δημήτρης
Χωνιανάκης Αντώνης