ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
20-12-2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. σχ. βιβλίο σ.74
2. σχ. βιβλίο σ.35
3. σχ. βιβλίο σ.61
4.

i	Σ
ii	Λ
iii	Σ
iv	Σ
v	Σ

ΘΕΜΑ Β

1. Η f είναι περιττή στο [-3,3] άρα θα ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ (1) για κάθε $x\in$ [-3,3] .

Προφανώς η σχέση (1) θα ισχύει και για x=2 αφού 2$\in$[-3,3], οπότε :

$f(-2)=-f(2)\Leftrightarrow f(2)=-f(-2)\Leftrightarrow f(2)=-10$.

2. Αν η f παρουσιάζει μέγιστο στο x=-3 το f(-3)=30 τότε θα ισχύει $f(x)\leq f(-3)=30$(2) για κάθε $x\in$ [-3,3]. Κατά συνέπεια η σχέση (2) θα ισχύει και για το -$x\in$[-3,3] και θα γίνεται $f(-x)\leq f(-3)\Leftrightarrow -f(x)\leq -f(3)\Leftrightarrow f(x)\geq f(3)$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για x=3 το $f(3)$. Όμως $f(-3)=-f(3)\Leftrightarrow 30=-f(3)\Leftrightarrow f(3)=-30$ άρα το ελάχιστο θα είναι το $f(3)=-30$.

3. $f(|x|)<f(2)\underset{\searrow}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}|x|>2\Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>2$, όμως $x\in$ [-3,3], οπότε η λύση της ανίσωσης είναι $x\in[-3,-2)\cup(2,3]$.

4. Για την g θα ισχύει ότι
$g(x)=f(x+2)+3=-(x+2)^3-(x+2)+3=-x^3-6x^2-12x-8-x-2+3=-x^3-6x^2-13x-7$.

ΚΕΝΤΡΟ Αγίας Σοφίας 39 2310.244.444
ΝΤΕΠΩ Β. Όλγας 203 2310.428.400
ΕΥΟΣΜΟΣ Μ.Αλεξάνδρου 45 2310.770.360

ΘΕΜΑ Γ

1. Για την $f(\mathrm{x}) = \eta\mu(11\pi - 3x) - \sigma\upsilon\nu\left(3\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)\right) + \beta$ ισχύει ότι :

- $\eta\mu(11\pi - 3x) = \eta\mu(5\cdot 2\pi + \pi - 3x) = \eta\mu(\pi - 3x) = \eta\mu 3x$
- $\sigma\upsilon\nu\left(3\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} + 3x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{20\pi + \pi}{2} + 3x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(5\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} + 3x\right) =$
  $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-3x)\right) = \eta\mu(-3x) = -\eta\mu 3x$

Άρα $f(\mathrm{x}) = \eta\mu(3x) - (-\eta\mu 3x) + \beta = 2\eta\mu 3x + \beta$

2. Το $\mathrm{A}\left(\frac{35\pi}{18}, 2\right) \in C_f \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{35\pi}{18}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(3\frac{35\pi}{18}\right) + \beta = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{35\pi}{6}\right) + \beta = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{36\pi - \pi}{6}\right) + \beta = 2 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\left(3\cdot 2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \beta = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \beta = 2 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta = 2 \Leftrightarrow -2\cdot\frac{1}{2} + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 3$$

Άρα $f(\mathrm{x}) = 2\eta\mu 3x + 3$.

3. Η συνάρτηση θα έχει περίοδο $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$.

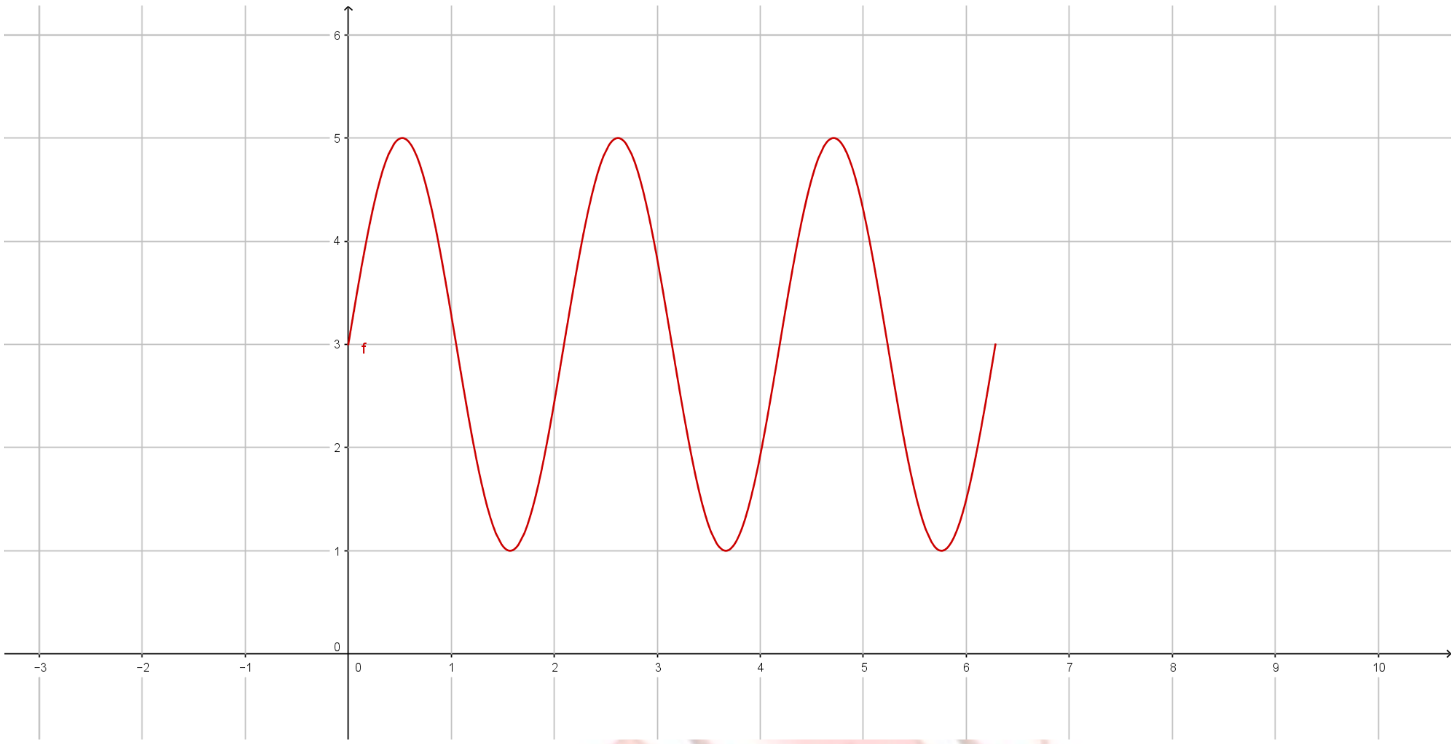
Γνωρίζω ότι $-1 \le \eta\mu 3x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\eta\mu 3x \le 2 \Leftrightarrow -2 + 3 \le 2\eta\mu 3x + 3 \le 2 + 3 \Leftrightarrow 1 \le f(x) \le 5$ άρα η συνάρτηση θα παίρνει ελάχιστη τιμή m=1 όταν ημ3x=-1 και μέγιστη τιμή M=5 όταν ημ3x=1.

Τέλος παρατηρώ ότι $f(-\mathrm{x}) = 2\eta\mu(-3x) + 3 = -2\eta\mu 3x + 3$ άρα η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

4. Η f έχει περίοδο $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$ άρα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ θα επαναλαμβάνεται το τμήμα της στο $[0, \frac{2\pi}{3}]$ άλλες δυο φορές εως το 2π. Κατασκευάζω πίνακα τιμών για το διάστημα $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
f(x)	3	5	3	1	3

Η γραφική παράσταση της f θα είναι :



ΘΕΜΑ Δ
1.α.

$$\mathrm{A}=\frac{\eta\mu^6\theta+\sigma\upsilon\nu^6\theta-1}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{(\eta\mu^2\theta)^3+(\sigma\upsilon\nu^2\theta)^3-1}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)(\eta\mu^4\theta-\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^4\theta)-1}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=$$

$$\frac{\left((\eta\mu^2\theta)^2+(\sigma\upsilon\nu^2\theta)^2-\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)-1}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{\left((\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)^2-2\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)-1}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=$$

$$\frac{1-3\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta-1}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{-3\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=-3$$

$$\mathrm{B}=\sigma\upsilon\nu^2\theta\left[(1+\varepsilon\varphi\theta)^2+(1-\varepsilon\varphi\theta)^2\right]=\sigma\upsilon\nu^2\theta\left[1+2\varepsilon\varphi\theta+\varepsilon\varphi^2\theta+1-2\varepsilon\varphi\theta+\varepsilon\varphi^2\theta\right]=$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta\left[2+2\varepsilon\varphi^2\theta\right]=2\sigma\upsilon\nu^2\theta\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta\right)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=2$$

β. Η (1) θα γίνεται $\sigma\upsilon\nu\omega-3\eta\mu\omega=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=3\eta\mu\omega+1$. Όμως τότε θα έχω :

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+\left(3\eta\mu\omega+1\right)^2=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+9\eta\mu^2\omega+6\eta\mu\omega+1=1 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\omega(5\eta\mu\omega+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\omega=0 \\ \acute{\eta} \\ \eta\mu\omega=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Όμως $\pi<\omega<\dfrac{3\pi}{2}$, άρα ημω<0 οπότε $\eta\mu\omega=-\dfrac{3}{5}$ και κατά συνέπεια $\sigma\upsilon\nu\omega=3\left(-\dfrac{3}{5}\right)+1=-\dfrac{4}{5}$.

Επίσης $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$ και $\sigma\varphi\omega=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}=\dfrac{4}{3}$.

2. Για τις γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν τα εξής:

$180^o-\hat{A}-\hat{\Gamma}=\hat{B}$, $180^o-\hat{B}-\hat{A}=\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=90^o-\hat{B}$, οπότε έχω:

$$\frac{\varepsilon\varphi(180^o-\hat{A}-\hat{\Gamma})}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}}=\frac{\eta\mu^2\hat{B}}{\eta\mu^2(180^o-\hat{B}-\hat{A})} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\hat{B}}{\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}}=\frac{\eta\mu^2\hat{B}}{\eta\mu^2\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\hat{B}\cdot\eta\mu^2\hat{\Gamma}=\eta\mu^2\hat{B}\cdot\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}\cdot\eta\mu^2\hat{\Gamma}=\eta\mu^2\hat{B}\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}=\frac{\eta\mu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu(90^o-\hat{B})}{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}=\frac{\eta\mu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu(90^o-\hat{B})} \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}=\frac{\eta\mu\hat{B}}{\eta\mu\hat{B}} \Leftrightarrow 1=1$$

που ισχύει άρα ισοδύναμα ισχύει και η αρχική σχέση.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ:
ΊΜΠΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ
ΝΙΚΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΠΑΛΤΣΟΚΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΝΙΚΟΣ
ΧΩΝΙΑΝΑΚΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ