ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
Πολυώνυμα/Εκθετική Συνάρτηση/Λογάριθμοι
10/4/2016
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

1.Α) Σχολικό βιβλίο σελ.175

1.Β) i. **Λ** ii. **Λ** iii. **Σ** iv. **Λ** v. **Λ**

1.Γ) 1 – **Γ**, 2 – **Α**, 3 – **Β**, 4 – **Ε**, 5 – **Δ**

ΘΕΜΑ 2ο

2.Α)

i. $$A=\frac{\ln 25-\log 9}{\ln\sqrt{5}-\log\sqrt{3}}=\frac{\ln 5^2-\log 3^2}{\ln 5^{\frac12}-\log 3^{\frac12}}=\frac{2\ln 5-2\log 3}{\frac12\ln 5-\frac12\log 3}=\frac{2\cancel{(\ln 5-\log 3)}}{\frac12\cancel{(\ln 5-\log 3)}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=\boxed{4}$$

ii. $$B=\frac{\ln\sqrt[3]{9}+\ln\sqrt[3]{4}-\ln\sqrt[3]{25}}{\ln 6-\ln 5}=\frac{\ln\sqrt[3]{3^2}+\ln\sqrt[3]{2^2}-\ln\sqrt[3]{5^2}}{\ln 6-\ln 5}=\frac{\ln 3^{\frac23}+\ln 2^{\frac23}-\ln 5^{\frac23}}{\ln 6-\ln 5}=\frac{\frac23\ln 3+\frac23\ln 2-\frac23\ln 5}{\ln 6-\ln 5}=$$

$$=\frac{\frac23(\ln 3+\ln 2-\ln 5)}{\ln 6-\ln 5}=\frac{\frac23\left(\ln(3\cdot 2)-\ln 5\right)}{\ln 6-\ln 5}=\frac{\frac23\cancel{(\ln 6-\ln 5)}}{\cancel{\ln 6-\ln 5}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

2.Β)

$$\ln(\ln\beta)-\ln(\ln\alpha)=\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\ln\beta}{\ln\alpha}\right)=\ln 2 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \frac{\ln\beta}{\ln\alpha}=2\Leftrightarrow \ln\beta=2\ln\alpha\Leftrightarrow\ln\beta=\ln\alpha^2 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \beta=\alpha^2$$

2.Γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.
Έστω $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{2x_1-3}{x_1+1}=\frac{2x_2-3}{x_2+1}\Leftrightarrow 2x_2x_1+2x_2-3x_1-3=2x_1x_2+2x_1-3x_2-3\Leftrightarrow 5x_2=5x_1\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Επομένως η συνάρτησή μας είναι 1 – 1 .

2.Δ) Παίρνουμε τους περιορισμούς: $x^2+2>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$
και $3x+12>0 \Leftrightarrow 3x>-12 \Leftrightarrow \boxed{x>-4}$

Τότε έχουμε

$$\log(x^2+2)-\log(3x+12)\geq 0 \Leftrightarrow \log(x^2+2)\geq \log(3x+12) \overset{\log x\ \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+2\geq 3x+12 \Leftrightarrow x^2-3x-10\geq 0$$

Από όπου παίρνουμε $x\in(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$.

Λαμβάνοντας υπ'όψην και τον περιορισμό $x>-4$, η λύση μας τελικά είναι $\boxed{x\in(-4,-2]\cup[5,+\infty)}$.

ΘΕΜΑ 3ο

3.Α) $f(x)=\ln(e^x-2)$

- **i.** Πρέπει $e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \overset{\ln x\ \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x>\ln 2 \Leftrightarrow x>\ln 2$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(\ln 2,+\infty)$

- **ii.** $f(x)+x=3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x-2)+\ln e^x=\ln 2^3 \Leftrightarrow \ln\left(e^x\left(e^x-2\right)\right)=\ln 8 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^{2x}-2e^x=8 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2e^x-8=0$,

  θέτω $e^x=\omega$ και έχω

  $\omega^2-2\omega-8=0 \Leftrightarrow \omega_1=4$ ή $\omega_2=-2$

  - $\omega_1=4 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow \boxed{x=\ln 4}$, δεκτή γιατί $4>2 \Leftrightarrow \ln 4>\ln 2 \Leftrightarrow \ln 4\in(\ln 2,+\infty)$
  - $\omega_2=-2 \Leftrightarrow e^x=-2$ <u>αδύνατη</u>

3.Β) Για $x>0$ είναι : $x^{\ln x}=e\sqrt{x^3} \Leftrightarrow \ln x^{\ln x}=\ln(e\cdot x^{\frac{3}{2}}) \Leftrightarrow \ln x\cdot\ln x=\ln e+\ln x^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\ln x\right)^2=1+\frac{3}{2}\ln x \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\left(\ln x\right)^2-3\ln x-2=0$

θέτω $\ln x=\omega$ και έχω

$2\omega^2-3\omega-2=0 \Leftrightarrow \omega_1=2$ ή $\omega_2=-\frac{1}{2}$

- $\omega_1=2 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=e^2}$
- $\omega_2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{\sqrt{e}}}$

3.Γ) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+\lambda x+4-\lambda$

- **i.** $\sqrt{e}^{\ln 9}=e^{\frac{1}{2}\ln 9}=e^{\ln\sqrt{9}}=\sqrt{9}=\boxed{3}$

ii. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+\sqrt{e}^{\ln 9}$ δηλαδή το $x+3$. Επομένως ισχύει
$P(-3)=0 \iff (-3)^3-(-3)^2-3\lambda+4-\lambda=0 \iff -27-9-4\lambda+4-0 \iff -4\lambda=32 \iff$
$\boxed{\lambda=-8}$

ΘΕΜΑ 4ο

4.A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x-7$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,3)$.

i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,3)$ επομένως ισχύει
$f(1)=3 \iff \alpha\cdot 2-7=3 \iff 2\alpha=10 \iff \alpha=5$
Έτσι η f γίνεται $\boxed{f(x)=5\cdot 2^x-7 \text{ με πεδίο ορισμού όλο το } \mathbb{R}.}$

ii. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τετμημένη 0 , άρα
$f(0)=5\cdot 2^0-7=5-7=-2$. Δηλαδή στο σημείο $\boxed{\mathrm{B}(0,-2)}$

iii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Θα ισχύει
$x_1<x_2 \overset{\nearrow}{\iff} 2^{x_1}<2^{x_2} \iff 5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2} \iff 5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7 \iff f(x_1)<f(x_2)$
Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

4.B)

i. Η f θα είναι γνησίως αύξουσα όταν :
$\frac{4}{9}(\log a^3)^2+\log a^3>1 \iff \frac{4}{9}(3\log a)^2+3\log a-1>0 \iff \frac{4}{9}\cdot 9(\log\alpha)^2+3\log\alpha-1>0 \iff$
$\iff 4(\log\alpha)^2+3\log\alpha-1>0$
θέτω $\log\alpha=\omega$ και έχω:
$4\omega^2+3\omega-1>0$, από όπου παίρνω $\omega<-1$ ή $\omega>\frac{1}{4}$

- $\omega<-1 \iff \log\alpha<-1 \iff \log\alpha<-\log 10 \iff \log\alpha<\log\frac{1}{10} \overset{\log x\nearrow}{\iff} \alpha<\frac{1}{10} \overset{\text{επειδή και } \alpha>0}{\Rightarrow} 0<\alpha<\frac{1}{10}$
- $\omega>\frac{1}{4} \iff \log\alpha>\frac{1}{4} \iff \log\alpha>\frac{1}{4}\log 10 \iff \log\alpha>\log 10^{\frac{1}{4}} \overset{\log x\nearrow}{\iff} \alpha>\sqrt[4]{10} \iff \alpha>\sqrt[4]{10}$

ii. Έχω

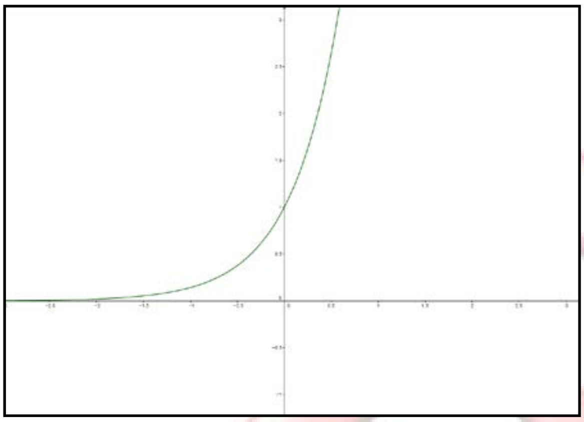
$$B=\frac{\log(\ln e)+4\log\sqrt{10}-\left(\log1000\right)^2}{\ln e^3+7\log\frac{1}{10}+\log0,001}+\log10^9=\frac{\log1+\log10^{\frac{1}{2}\cdot4}-3^2}{3+\log10^{-1\cdot7}+\log10^{-3}}+9=\frac{0+\log10^2-9}{3+\log10^{-7}-3}+9=$$

$$=\frac{2-9}{-7}+9=\frac{-7}{-7}+9=1+9=\boxed{10}$$

Η f λοιπόν, γίνεται

$$f(x)=\left(\frac{4}{9}\left(\log a^3\right)^2+\log a^3\right)^x=\left(\frac{4}{9}\left(3\log10\right)^2+3\log10\right)^x=\left(\frac{4}{9}\cdot9+3\right)^x=(4+3)^x=7^x$$

iii.



Τις λύσεις των θεμάτων επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Ίμπος Χρήστος
Νίκου Δημήτρης
Παλτσόκας Παναγιώτης
Παπαθανασίου Νίκος
Χωνιανάκης Αντώνης