# Άλγεβρα Α' Λυκείου

## Εξεταζόμενη Ύλη: Οι πράξεις και ιδιότητες τους – Διάταξη Πραγματικών Αριθμών – Απολυτή τιμή Πραγματικών Αριθμών

## Ημερομηνία: 23 Οκτωβρίου 2016

## Απαντήσεις

**Θέμα Α:**

**Α1.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 62

**Α2.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| i. | Γ | iii. | Δ | v. | Δ |
| ii. | Γ | iv. | Δ | | |

**Α3.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| α. | Σ | γ. | Σ | ε. | Σ |
| β. | Σ | δ. | Λ | | |

**Θέμα Β:**

**Β1.**

**(α)**

$$A=\frac{\left(-|-4|-|-2|\right)^2\cdot|-5|}{|-4|\cdot|-2|+|-2|}=\frac{(-4-2)^2\cdot 5}{4\cdot 2+2}=\frac{36\cdot 5}{8+2}=\frac{180}{10}=18$$

**(β)**

- ✓ π – 4 < 0
- ✓ π – 3 > 0
- ✓ 2π – 7 < 0

$$B=|\pi-4|-|\pi-3|-|2\pi-7|=-\pi+4-(\pi-3)-(-2\pi+7)\Leftrightarrow$$
$$B=-\pi+4-\pi+3+2\pi-7=0$$

**Β2.**

**(α)**

$$A=(-1)^{48}-3^2-(-2)^3-(-3)^2=1-9+8-9=-9$$

**(β)**

$$B=\frac{\left(4^5\right)^3\cdot 4^{-9}}{\left(4^5\cdot 4^{-7}\right)^{-2}}=\frac{4^{15}\cdot 4^{-9}}{4^{-10}\cdot 4^{14}}=\frac{4^6}{4^4}=4^2=16$$

**Θέμα Γ:**

**Γ₁.**Ν.Δ.Ο. $x(x-3y)^2-(x+y)^3=-y(y-3x)^2$

$$x(x-3y)^2-(x+y)^3=-y(y-3x)^2 \Leftrightarrow$$
$$x(x^2-6xy+9y^2)-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)=-y(y^2-6xy+9x^2) \Leftrightarrow$$
$$x^3-6x^2y+9xy^2-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3=-y^3+6xy^2-9x^2y \Leftrightarrow$$
$$0=0, \text{ που ισχύει πάντα}$$

**Γ₂.** Αν $\alpha<\beta$ τότε Ν.Δ.Ο. $3\alpha^3+\alpha+2<3\beta^3+\beta+2$

- ✓ $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^3<\beta^3 \Leftrightarrow 3\alpha^3<3\beta^3$
- ✓ $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha+2<\beta+2$ **(+)**

$$3\alpha^3+\alpha+2<3\beta^3+\beta+2$$

**Γ₃.** Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}+1=\dfrac{4\alpha}{\alpha+\beta}$ τότε Ν.Δ.Ο. $\alpha=\beta$

$$\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{4\alpha}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{4\alpha}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)^2=4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=4\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$$

**Θέμα Δ:**

**Δ₁.** $\alpha-\beta=2$ και $\alpha\beta=3$

(α)

$$\alpha-\beta=2 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2=4 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$$
$$\alpha^2-2\cdot 3+\beta^2=4 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=4+6 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=10$$

(β)

$$\alpha-\beta=2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^3=8 \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=8$$
$$\alpha^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)-\beta^3=8 \Leftrightarrow \alpha^3-3\cdot 3(2)-\beta^3=8 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^3-\beta^3=8+18 \Leftrightarrow \alpha^3-\beta^3=26$$

(γ)

$$\alpha^2+\beta^2=10 \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2)^2=100 \Leftrightarrow \alpha^4+2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^4=100 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^4+2\cdot(\alpha\cdot\beta)^2+\beta^4=100 \Leftrightarrow \alpha^4+2\cdot(3)^2+\beta^4=100 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^4+\beta^4=100-18 \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4=82$$

**Δ2.**

**(α)**

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3$$
$$-2 \le y \le -1 \quad \textbf{(+)}$$
$$-7 \le y - x \le -4$$

**(β)**

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 9 \le 3x \le 15$$
$$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow 2 \le -2y \le 4 \quad \textbf{(+)}$$
$$11 \le 3x - 2y \le 19$$

**(γ)**

$$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow 1 \le -y \le 2$$
$$3 \le x \le 5 \quad (\cdot)$$
$$3 \le -xy \le 10 \Leftrightarrow -3 \ge xy \ge -10$$

**Οπότε:**

$$-3 \ge xy \ge -10$$
$$15 \ge 3x \ge 9 \quad \textbf{(+)}$$
$$12 \ge xy + 3x \ge -1$$

**(δ)**

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 9 \le x^2 \le 25$$
$$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4 \quad \textbf{(+)}$$
$$10 \le x^2 + y^2 \le 29$$

**(ε)**

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 27 \le x^3 \le 125$$
$$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4 \Leftrightarrow -4 \le -y^2 \le -1 \quad \textbf{(+)}$$
$$23 \le x^3 - y^2 \le 124$$

**Δ3.**

$\alpha > 0$ και $\alpha \neq -\beta$, $\alpha^2\beta - \alpha^3$ και $\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$

Έστω ότι: $\alpha^2\beta - \alpha^3 < \alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta \Leftrightarrow$

$$\alpha^2\beta - \alpha^3 - \alpha\beta^2 - 3\alpha^2\beta < 0 \Leftrightarrow -\alpha^3 - \alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta < 0 \Leftrightarrow$$

$$-\alpha\left(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\right) < 0 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha + \beta\right)^2 > 0, \text{ που ισχύει πάντα}$$

Οπότε $\alpha^2\beta - \alpha^3 < \alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$

**Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές**
**Δημήτρης Νίκου**
**Παναγιώτης Παλτσόκας**
**Νίκος Παπαθανασίου**
**Αντώνης Χωνιανάκης**