ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
22-10-2017
ΥΛΗ:ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ & ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ-ΔΙΑΤΑΞΗ- ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. σελίδα 63 σχ. βιβλίο
2. i) Σ ii) Σ iii) Σ iv) Σ v) Λ
3. i) –β
   ii) $-3a^2\beta$ και $-\beta^3$
   iii) 4αβ
   iv) $\frac{1}{4}$ και $-\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Β

1. Α$=\frac{(xy^2)^3(x^2y^{-1})^{-1}}{(y^{-1})^{-7}:(-y)}=\frac{x^3y^6x^{-2}y^1}{y^7:(-y)}=\frac{xy^7}{-y^6}=-xy=-[(2017)\cdot(-\frac{1}{2017})]=1$

2. Επειδή $2\pi-6=2(\pi-3)$,όπου $\pi-3>0$
   και $9-3\pi=3(3-\pi)$, όπου $3-\pi<0$
   και $2\pi-8=2(\pi-4)$, όπου $\pi-4<0$ θα έχουμε
   Β$=|2\pi-6|+|9-3\pi|-|2\pi-8|=2\pi-6-(9-3\pi)+(2\pi-8)=2\pi-6-9+3\pi+2\pi-8=7\pi-23$

3. i) $0<\alpha<1\Rightarrow a<1\xrightarrow{a>0}a\cdot a<a\cdot 1\Rightarrow a^2<a$
   $\begin{cases}a^2<a\\ a<1\end{cases}\Rightarrow a\cdot a^2<a\cdot 1\Rightarrow a^3<a$

   ii) $0<a\Rightarrow 0<a^3$ άρα και από (i) 0< $a^3<a$, επίσης $\alpha<1\Rightarrow\frac{1}{\alpha}>1$

   οπότε η σειρά έχει ως εξής $0<a^3<a<1<\frac{1}{\alpha}$.

ΘΕΜΑ Γ

1. $2\le x\le 3$ $1\le y\le 2$
   i. προσθέτω κατά μέλη $3\le x+y\le 5$, οι ισότητες ισχύουν όταν $x+y=3$ ή $x+y=5$
   ii. $\begin{cases}2\le x\le 3|\cdot 2\\ 1\le y\le 2|\cdot(-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4\le 2x\le 6\\ -3\ge -3y\ge -6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4\le 2x\le 6\\ -6\le -3y\le -3\end{cases}$ προσθέτω κατά μέλη $-2\le 2x-3y\le 3$
   iii. $\begin{cases}2\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{3}\\ 1\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}\\ 1\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{y}{x}\le 1$

2. A$=\dfrac{x^3-27}{x^2-49}\cdot\dfrac{x^2-7x}{x^2-3x}=\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-7)(x+7)}\cdot\dfrac{x(x-7)}{x(x-3)}=\dfrac{x^2+3x+9}{x+7}$

3. i) $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 4\xrightarrow{a>0}a^2+4\geq 4a\Rightarrow a^2+4-4a\geq 0\Rightarrow(a-2)^2\geq 0$, ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

ii) από (i) έχουμε $\begin{cases}\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 4\\ \beta+\dfrac{4}{\beta}\geq 4\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right)\geq 4\cdot 4\Rightarrow\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right)\geq 16$

ΘΕΜΑ Δ

1. Εφόσον α,β αντίθετοι $\to\alpha+\beta=0$ και γ,δ αντίστροφοι $\to\gamma\cdot\delta=1$ άρα
$A=1-2(\alpha-1)-\gamma(3\delta-\beta)+\beta(-\gamma-2)=1-2\alpha+2-3\gamma\delta+\cancel{\beta\gamma}-\cancel{\beta\gamma}-2\beta=1-3\cdot 1+2-2(\alpha+\beta)=$
$2-2-2\cdot 0=0$

2. i) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\alpha-\beta-1\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=2\alpha-2\beta-2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2-2\alpha+2\beta+2=0\Leftrightarrow(a-1)^2+(\beta+1)^2=0$
άρα $\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$ και $\beta+1=0\Leftrightarrow\beta=-1$

ii) $\beta\leq\dfrac{2x}{x^2+1}\leq a\Leftrightarrow -1\leq\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1$, το $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
$-1\leq\dfrac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow -x^2-1\leq 2x\Leftrightarrow 0\leq x^2+1+2x\Leftrightarrow 0\leq(x+1)^2$ που ισχύει για κάθε x.
Για x=-1 ισχύει η ισότητα.
$\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow 2x\leq x^2+1\Leftrightarrow 0\leq x^2+1-2x\Leftrightarrow 0\leq(x-1)^2$ που ισχύει για κάθε x.
Για x=1 ισχύει η ισότητα.

iii) Ξέρω από (ii) πως ισχύει $\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1$, διαιρώ με το 2 και έχω $\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{x}{x^2+1}\leq\dfrac{1}{2}$
το ίδιο ισχύει και για $y\in\mathbb{R}$ $\dfrac{2y}{y^2+1}\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{y}{y^2+1}\leq\dfrac{1}{2}$ προσθέτω κατά μέλη και έχω
$\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}\leq 1$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Νίκου Δημήτρης
Παλτσόκας Παναγιώτης
Παπαθανασίου Νίκος
Χωνιανάκης Αντώνης