

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

21/10/2018

Εξεταζόμενη ύλη: Σύνολα – Πραγματικοί αριθμοί – Διάταξη – Απόλυτες τιμές

ΘΕΜΑ 1°

1) α 2) β 3) α

4) α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος

5) Δύναμη ενός πραγματικού αριθμού a με βάση a και εκθέτη $n \in \mathbb{N}^*$, ονομάζεται το γινόμενο του a με τον εαυτό του n φορές και συμβολίζεται με a^n .

$$a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_n, \text{ } n \text{ φορές}$$

ΘΕΜΑ 2°

1) Υψώνουμε στο τετράγωνο και τα 2 μέλη. Βιβλίο σ.63, απόδειξη 3.

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{1}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta} &= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta} = \frac{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} = \frac{1}{(\alpha + \beta)} \\ \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha + \beta)^{-2}} \cdot \frac{1}{(\alpha - \beta)^2 + \alpha\beta} &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha + \beta)^{-2}} \cdot \frac{1}{(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha + \beta)^{-2}} \cdot \frac{1}{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^{-2}} = (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3°

1) $a + a^2 - a + \beta^2 - a^2 = \beta^2 \geq 0$

2) Είτε μέσω πράξεων, είτε αναγνωρίζοντας $a = 2000$, $\beta = 999$, η σχέση μετασχηματίζεται, όπως και στο (1) σε $\beta^2 = 999^2 > 0$

3) Μπορώ να προσθέσω και να πολλαπλασιάσω ανισότητες κατά μέλη, άρα:

$$\begin{aligned} 1+3 &< x+y < 2+4 \\ 4 &< x+y < 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &< y < 4 \\ -3 &> y > 4 \\ -4 &< y < -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1+(-4) &< x+(-y) < 2+(-3) \\ -3 &< x-y < -1 \end{aligned}$$

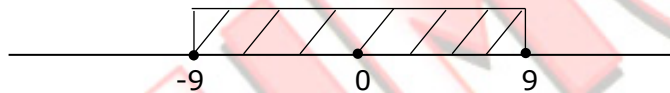
$$\begin{aligned}
 1 < x < 2 \quad \text{και} \quad 3 < y < 4 \\
 2 \cdot 1 < 2x < 2 \cdot 2 \quad \text{και} \quad 3 \cdot 3 < 3y < 3 \cdot 4 \\
 2 < 2x < 4 \quad \text{και} \quad 9 < 3y < 12 \\
 2 < 2x < 4 \quad \text{και} \quad -9 > -3y > -12 \\
 2 < 2x < 4 \quad \text{και} \quad -12 < -3y < -9 \\
 & \text{άρα} \\
 2 + (-12) < 2x + (-3y) < 4 + (-9) \\
 -10 < 2x - 3y < -5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 3 < xy < 2 \cdot 4 \\
 3 < xy < 8
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4°

1)

α) $|2x + 3| - 7 \leq 2$
 $|2x + 3| \leq 9$



Άρα: $2x + 3 \leq 9$ και $2x + 3 \geq -9$
 $2x \leq 6$ $2x \geq -12$
 $x \leq 3$ $x \geq -6$

β) Η ισότητα ικανοποιείται για $x = -6$ και $x = 3$

γ) Ορίζονται $x_1 = -6$, $x_2 = 3$.

$$\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} + \frac{-2x_1}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_2^2} = \frac{-18 \cdot 1}{-3 \cdot -9} + \frac{12}{36} + \frac{3}{9} = \frac{-18}{27} + \frac{12}{36} + \frac{3}{9} = \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-2+1+1}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

β)

$|x + 3| + |3x - 5| - 9 = 9$
 $|x + 3| + |3x - 5| = 18$

$x + 3$	-	+	+
$3x - 5$	-	-	+
	-3		5/3

Επιλύω τις επιμέρους εξισώσεις για να βρω τα σημεία που αλλάζει το πρόσημο της κάθε απόλυτης τιμής.

$x + 3 = 0$ και $3x - 5 = 0$
 $x = -3$ $3x = 5$
 $x = 5/3$

Από τον πίνακα παίρνω τις 3 περιπτώσεις: $x \leq -3$, $-3 \leq x \leq 5/3$, $x \geq 5/3$

Για $x \leq -3$, τα πρόσημα και των 2 απόλυτων τιμών θα είναι πλην, επομένως:

$|x + 3| + |3x - 5| = 18$
 $-(x + 3) + [-(3x - 5)] = 18$
 $-x - 3 - 3x + 5 = 18$
 $-4x = 16$
 $x = -4$

Και μετά από έλεγχο διαστήματος, $-4 < -3$ επομένως αποδεκτή λύση.

Για $-3 \leq x \leq 5/3$, τα πρόσημα των απόλυτων εναλλάσσονται, όπως φαίνεται στον πίνακα προσημών. Επομένως:

$$\begin{aligned} |x + 3| + |3x - 5| &= 18 \\ +(x + 3) + [-(3x - 5)] &= 18 \\ x + 3 - 3x + 5 &= 18 \\ -2x &= 10 \\ x &= -5 \text{ Απορρίπτεται.} \end{aligned}$$

Μετά από έλεγχο διαστήματος, το -5 δεν ανήκει στο διάστημα $[-3, 5/3]$ και απορρίπτεται.

Τέλος, για $x \geq 5/3$, τα πρόσημα των απολύτων τιμών θα είναι θετικά, επομένως

$$\begin{aligned} |x + 3| + |3x - 5| &= 18 \\ +(x + 3) + [(3x - 5)] &= 18 \\ x + 3 + 3x - 5 &= 18 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Το οποίο είναι αποδεκτή τιμή, αφού $5 > 5/3$

Τις απαντήσεις του διαγωνίσματος επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

**Τζιώρτζης Γιάννης
Τζιώρτζης Μιχάλης**