Απαντήσεις Διαγωνίσματος Άλγεβρας Α' Λυκείου
Εξεταζόμενη Ύλη: Εξισώσεις - Ανισώσεις
Κυριακή 05 Φεβρουαρίου 2017

<u>Θέμα Α</u>

Α₁. Σελ.89 σχολικού βιβλίου

Α₂. Σελ.90 σχολικού βιβλίου

Α₃. i. **Λ** ii. **Λ** iii. **Σ** iv. **Σ** v. **Σ**

<u>Θέμα Β</u>

Β₁.

i) $x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = \pm 3$

ii) $x^2 - 12|x| + 35 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 12|x| + 35 = 0$, θέτω $|x| = \omega$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$\omega^2 - 12\omega + 35 = 0$ με $\Delta = (-12)^2 - 4\cdot 1\cdot 35 = 144 - 140 = 4$

$\omega_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{12 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{12 \pm 2}{2}$ άρα

$\omega_1 = 7 \Leftrightarrow |x_1| = 7 \Leftrightarrow x_1 = \pm 7$ και $\omega_2 = 5 \Leftrightarrow |x_2| = 5 \Leftrightarrow x_2 = \pm 5$

Β₂.

i)

$$8 - |2x-6| \le \frac{|3-x|-4}{2} \Leftrightarrow 8 - 2|x-3| \le \frac{|x-3|-4}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 16 - 4|x-3| \le |x-3| - 4 \Leftrightarrow -5|x-3| \le -20$$

$$\overset{:(-5)}{\Leftrightarrow} |x-3| \ge 4 \Leftrightarrow (x-3 \le -4 \;\; ή \;\; x-3 \ge 4) \Leftrightarrow (x \le -1 \;\; ή \;\; x \ge 7)$$

ii)

$$3(x-4)^2 - (x+1)^3 + 2x(x-1)(x+1) < (x+2)(x^2-2x+4) - 29x \Leftrightarrow$$

$$3(x^2-8x+16) - (x^3+3x^2+3x+1) + 2x(x^2-1) < x^3 + 2^3 - 29x \Leftrightarrow$$

$$\cancel{3x^2} - \cancel{24x} + 48 - \cancel{x^3} - \cancel{3x^2} - \cancel{3x} - 1 + \cancel{2x^3} - \cancel{2x} - \cancel{x^3} - 8 + \cancel{29x} < 0 \Leftrightarrow$$

$0x < -39$

Αδύνατη

Β₃ .

Η εξίσωση $\lambda(\lambda-1)x = (\lambda+1)(\lambda-1)$

i) Έχει μοναδική λύση όταν $\alpha \ne 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) \ne 0 \Leftrightarrow \lambda \ne 0 \;\; και \;\; \lambda \ne 1$

ii) Είναι ταυτότητα όταν

$$(\alpha=0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \beta=0) \Rightarrow [\lambda(\lambda-1)=0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ (\lambda+1)(\lambda-1)=0] \Leftrightarrow (\lambda=0 \ ή \ \lambda=1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lambda=-1 \ ή \ \lambda=1)$$

Άρα $\lambda=1$

iii) Είναι αδύνατη όταν

$$(\alpha=0 \ \kappa\alpha\iota \ \beta\neq 0) \Rightarrow [\lambda(\lambda-1)=0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ (\lambda+1)(\lambda-1)\neq 0] \Leftrightarrow (\lambda=0 \ ή \ \lambda=1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lambda\neq -1 \ \kappa\alpha\iota \ \lambda\neq 1)$$

Άρα $\lambda=0$

Θέμα Γ

Γ1. Η εξίσωση $x^2-2x-5=0 \quad (1)$ έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-5)=4+20=24>0$

Επομένως έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες.

Γ2.

i) $x_1+x_2=S=\dfrac{-\beta}{\alpha}=\dfrac{-(-2)}{1}=2$

ii) $x_1\cdot x_2=P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-5}{1}=-5$

iii) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P=2^2-2(-5)=4+10=14$

iv) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_1x_2}+\dfrac{x_1}{x_1x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{S}{P}=-\dfrac{2}{5}$

Γ3. Η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τις

$\rho_1=2x_1$ και $\rho_2=2x_2$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), θα γράφεται

$x^2-S_2x+P_2=0$ όπου

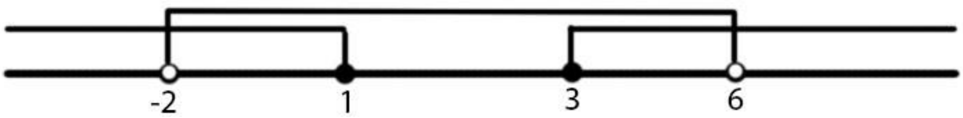
$S_2=\rho_1+\rho_2=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2S=4$ και

$P_2=\rho_1\cdot\rho_2=2x_1\cdot 2x_2=4x_1x_2=4P=-20$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2-4x-20=0$

Γ4. $1\le |x-S|<4 \Rightarrow 1\le |x-2|<4$ Λύνω ξεχωριστά τις δύο ανισώσεις.

$\lvert x-2\rvert \ge 1 \Leftrightarrow$		$\lvert x-2\rvert < 4 \Leftrightarrow$
$x-2\le -1 \ ή \ x-2\ge 1 \Leftrightarrow$	και	$-4<x-2<4 \Leftrightarrow$. Βρίσκω τις κοινές λύσεις τους.
$x\le 1 \ ή \ x\ge 3$		$-2<x<6$



Επομένως η ανίσωση έχει λύσεις $x\in(-2,1]\cup[3,6)$

Θέμα Δ

Δ₁. Η $x^2+(\lambda-5)x-\lambda+4=0$, $\lambda\in\mathbf{R}$ $\quad(2)$ έχει

$\Delta=(\lambda-5)^2-4\cdot1\cdot(-\lambda+4)=\lambda^2-10\lambda+25+4\lambda-16=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2\geq0$ για κάθε $\lambda\in\mathbf{R}$. Άρα έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbf{R}$

Δ₂. Οι ρίζες της (2) είναι άνισες όταν

$\Delta>0\Leftrightarrow(\lambda-3)^2>0\Leftrightarrow(\lambda-3)^2\neq0\Leftrightarrow\lambda-3\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq3$

και είναι ίσες για

$\Delta=0\Leftrightarrow(\lambda-3)^2=0\Leftrightarrow\lambda-3=0\Leftrightarrow\lambda=3$

Δ₃. $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}+x_1+x_2=-\dfrac{1}{x_1+x_2}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{P}{S}+S=-\dfrac{1}{S}$ όπου

$S=\dfrac{-\beta}{\alpha}=\dfrac{-(\lambda-5)}{1}=5-\lambda$ και $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-\lambda+4}{1}=4-\lambda$, έτσι η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$\dfrac{P}{S}+S=-\dfrac{1}{S}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{4-\lambda}{5-\lambda}+5-\lambda=-\dfrac{1}{5-\lambda}\quad\overset{\cdot(5-\lambda)}{\Leftrightarrow}\quad4-\lambda+(5-\lambda)^2=-1\ ,\quad \gamma\iota\alpha\ \ \lambda\neq5$

$\Leftrightarrow\quad4-\lambda+25-10\lambda+\lambda^2+1=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda^2-11\lambda+30=0$

$\Delta=(-11)^2-4\cdot1\cdot30=121-120=1$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-(-11)\pm\sqrt{1}}{2}=\dfrac{11\pm1}{2}$, άρα

$\lambda_1=6$

$\lambda_2=5$ απορρίπτεται λόγω περιορισμών.

Δ₄. Η (2) έχει ρίζες αντίθετες όταν $x_1+x_2=0\Leftrightarrow S=0\Leftrightarrow5-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=5$

Τις απαντήσεις των θεμάτων επιμελήθηκαν οι καθηγητές

Νίκου Δημήτρης

Παλτσόκας Παναγιώτης

Παπαθανασίου Νίκος

Χωνιανάκης Αντώνης