ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ύλη: Πραγματικοί Αριθμοί - Εξισώσεις
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03 Ιανουαρίου 2018
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 70.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 69.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 71.

Α4.

(i) Λάθος
(ii) Σωστό
(iii) Λάθος
(iv) Λάθος
(v) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Έχουμε $|2x-1|<1 \Leftrightarrow -1<2x-1<1 \Leftrightarrow 0<2x<2 \Leftrightarrow 0<x<1$.

β) Από την υπόθεση είναι $0 < x < 1$ και πολλαπλασιάζοντας με $x > 0$ έχουμε ότι: $x^2 < x$. Τελικά είναι $x^2 < x < 1$.

Β2. $$\frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{y^2-9} \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{(y+3)(y-3)}$$

ΕΚΠ= (y-3)(y+3)

Οπότε πρέπει: $(y-3)(y+3)\neq 0 \Leftrightarrow y\neq 3$ και $y\neq -3$

$$(y+3)(y-3)\frac{y+1}{y-3}-(y+3)(y-3)\frac{y-1}{y+3}=(y+3)(y-3)\frac{8y}{(y+3)(y-3)} \Leftrightarrow$$

$$(y+3)(y+1)-(y-3)(y-1)=8y \Leftrightarrow y^2+y+3y+3-y^2+y+3y-3-8y=0 \Leftrightarrow$$

$0y = 0$, άπειρες λύσεις.

Άρα $y \in \mathbb{R}-\{\pm 3\}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3-1}=$
$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8}=2.$

Γ2. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{6}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\cdot$
$2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}=3\cdot 2=6.$

Γ3. Έχουμε:

- $(\alpha-3)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha-3)^2} \leq 1 \Leftrightarrow |\alpha-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha-3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \alpha \leq 4$ $\Leftrightarrow 4 \leq 2\alpha \leq 8$ **(1)**

- $(\beta+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{(\beta+1)^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow |\beta+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq \beta \leq 1$ **(2)**

Με πρόσθεση των **(1)** και **(2)** έχουμε: $1 \leq 2\alpha+\beta \leq 9$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) $A=\sqrt{1+\frac{2x}{x^2+1}}+\sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}=\sqrt{\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}}=$

$$=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}=\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{|x+1|+|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) i. d (x, 0) < 1 $\Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Άρα Α = $\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}\,(x+1-x+1)=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

ii. $A > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{2}\,\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2^2 > \sqrt{2}^2 \cdot (\sqrt{x^2+1}\,)^2 \Leftrightarrow$

$4 > 2\,(x^2+1) \Leftrightarrow 2 > x^2+1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, που ισχύει.

Δ2. α) Θα πρέπει:

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq \lambda \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\{-1,0,\lambda\}$$

β)

$$\frac{\lambda}{x+1}-\frac{\lambda-1}{x}=\frac{1}{x-\lambda} \Leftrightarrow$$

$$x(x+1)(x-\lambda)\cdot\frac{\lambda}{x+1}-x(x+1)(x-\lambda)\frac{\lambda-1}{x}=x(x+1)(x-\lambda)\frac{1}{x-\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\lambda x(x-\lambda)-(x+1)(x-\lambda)(\lambda-1)=x(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\lambda x^2-\lambda^2 x-\left(x^2-x\lambda+x-\lambda\right)(\lambda-1)=x^2+x \Leftrightarrow$$

$$\lambda x^2-\lambda^2 x-x^2\lambda+x^2+x\lambda^2-x\lambda-x\lambda+x+\lambda^2-\lambda=x^2+x \Leftrightarrow$$

$$2\lambda x=\lambda^2-\lambda \Leftrightarrow$$

$$2\lambda x=\lambda(\lambda-1)$$

γ) Αν λ ≠ 0 η εξίσωση έχει μοναδική λύση την: $2\lambda x=\lambda(\lambda-1) \Rightarrow x=\frac{\lambda-1}{2}$

Αν λ = 0 η εξίσωση γίνεται: 0x = 0, οπότε έχει άπειρες λύσεις.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές :

Νίκου Δημήτρης

Παλτσόκας Παναγιώτης

Παπαθανασίου Νίκος

Χωνιανάκης Αντώνης