

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 8 ΜΑΡΤΙΟΥ 2020**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.  
*ΜΟΝΑΔΕΣ 6*
- A2.** 1) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακρότατων μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;  
2) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών.  
*ΜΟΝΑΔΕΣ 3+4*
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως  $A$ , αν θεωρείτε ότι είναι αληθής, ή ως  $\Psi$ , αν θεωρείτε ότι είναι ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας  
" Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$  "  
*ΜΟΝΑΔΕΣ 1+3*
- A4.** Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:  
1) Αν  $f$  συνεχής και  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ .  
2) Αν  $f$  συνεχής, ισχύει η σχέση  $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} \lambda f(x) dx$ .  
3) Αν  $f'$ ,  $g'$  συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε ισχύει η σχέση  $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx = [f'(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx$ .  
4) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος  $\Delta$  στα οποία η  $f$  παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$  στο  $\Delta$ .  
*ΜΟΝΑΔΕΣ 8*

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$

- B1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .  
*ΜΟΝΑΔΕΣ 7*
- B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.  
*ΜΟΝΑΔΕΣ 6*

**B3.** Να δείξετε ότι  $\sqrt{7} \cdot \ln 5 - \sqrt{5} \cdot \ln 7 > 2(\sqrt{5} - \sqrt{7})$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**B4.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $F(x) = 2\sqrt{x} \ln x$  είναι μία αρχική της  $f(x)$  στο  $(0, +\infty)$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε το  $\int_1^e f(x) \cdot F(x) dx$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3+4**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η  $f(x) = (x - \beta) \ln(x - 1) - \alpha x$  με  $x > 1$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Αν η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(2, -2)$  και ισχύει ότι  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) + 2 + 4h}{h} = 4$  τότε:

**Γ1.** Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Για  $\alpha = \beta = 1$ :

**Γ2.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**Γ3.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, +\infty)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**Γ4.** Να δείξετε ότι  $f(3) < \frac{f(2) + f(4)}{2}$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**Γ5.** Να δειχτεί ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (e + 1, e^3 + 1)$ , με  $\xi_1 < \xi_2$  τέτοια ώστε  $f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = -1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι

- η ευθεία  $x + y = 0$  εφάπτεται στη  $C_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  και

- $\lim_{h \rightarrow x} \frac{x \cdot f(h) - h \cdot f(x)}{h - x} = 2 - x - f(x) - x^2 f''(x)$  για κάθε  $x > 0$

Δ1. α) Να δείξετε ότι  $f'(x) + 1 = \frac{2}{x} - x \cdot f''(x)$ , για κάθε  $x > 0$ .

β) Να δείξετε ότι  $f(x) = \ln^2 x - x$ , για κάθε  $x > 0$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+4

Δ2. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(e^{-x} \cdot x^{\ln x}) + 1 = 0$  έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $(0,1)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4+4

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση  $f(3^x + 4^x) > f(5^x)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ4. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha > 0$  ώστε να ισχύει  $\int_{2^\alpha}^{\alpha^2} \frac{2 \ln x}{x} dx = \alpha^2 - 2^\alpha$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καφαλιάρης Στέλιος

Σιταρίδης Σπύρος