

Μαθηματικά Προσανατολισμού  
Γ' Λυκείου  
Ημερομηνία: 21-04-2017

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι συνεχής, συνεχής σε  $[α,β]$  και συνεχής σε  $(α,β)$ ;

**Μονάδες 4**

**A2.** Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να δείξετε ότι για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , δηλαδή  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Μονάδες 7**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
- ii. Αν  $f''(x_0) = 0$ , τότε στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  έχουμε σημείο καμπής.
- iii. Αν ένα από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $\pm\infty$  τότε η ευθεία  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- iv. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , τότε ισχύει:  $f \circ g = g \circ f$ .
- v. Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$  τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 3x, x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  που είναι παράλληλη στην ευθεία ( $\kappa$ ):  $x + y + 2017 = 0$ .

**Μονάδες 6**

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $C_f$  την ευθεία ( $\epsilon$ ) και τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

**Μονάδες 9**

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i.  $\int_1^2 (3x^2 - 4x) \ln x dx$

ii.  $\int_4^5 \frac{x-11}{x^2-2x-3} dx$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - 2x - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  και να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει δύο ρίζες ετερόσημες  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$ .

**Μονάδες 8**

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} + \frac{f(\beta)-1}{\beta-2} = 210$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(1,2)$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ .

**Μονάδες 6**

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x + f(x) = \eta\mu x$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(x_1, x_2)$  όπου  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του ερωτήματος 2.

**Μονάδες 4**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $4f''(x)(f(x))^3 = -1$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  (1)
- $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  (2)
- $2f'(1) = f(1) = 1$  (3)

1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

**Μονάδες 4**

2. Να αποδείξετε ότι  $(2f(x)f'(x))^2 = 1$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

3. Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Μονάδες 6**

4. Αν  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ , τότε:

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $M$  ( $\alpha, f(\alpha)$ ), με  $\alpha > 0$ .

**Μονάδες 3**

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) και τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 3**

iii. Αν ένα σημείο  $M$  κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$  έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα  $y'y$  με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδόν  $E$  του χωρίου  $\Omega$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.

**Μονάδες 3**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

**Τα θέματα επιμελήθηκαν οι καθηγητές :**

**Ίμπος Χρήστος  
Καψαλιάρης Στέλιος  
Νίκου Δημήτρης  
Παπαθανασίου Νίκος  
Σιταρίδης Σπύρος**