ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΥΛΗ: Όρια – Συνέχεια – Διαφορικός Λογισμός – Ορισμένο Ολοκλήρωμα
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 4 Μαρτίου 2018
Θερινά Τμήματα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\mathbb{S}$, για την οποία ισχύουν:

- f συνεχής στο διάστημα $\mathbb{S}$
- $f'(x)=0$ στο εσωτερικό του διαστήματος $\mathbb{S}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα $\mathbb{S}$.

(Μονάδες 5)

Α2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

(Μονάδες 3)

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα ***Α***, αν είναι αληθής ή το γράμμα ***Ψ*** αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα *(α)*. (μονάδες 3)

(Μονάδες 4)

Α4. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα $\mathbb{S}$ είναι:

α. τα εσωτερικά σημεία τού $\mathbb{S}$ στα οποία η παράγωγος τής f μηδενίζεται.

β. τα εσωτερικά σημεία τού $\mathbb{S}$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

γ. τα άκρα τού $\mathbb{S}$ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

δ. όλα τα παραπάνω.

(Μονάδες 3)

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

(ii) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

(iii) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, με $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, τότε ισχύει πάντα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(iv) Αν $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, τότε κάθε παραγωγίσιμη στο διάστημα $\mathbb{S}$ συνάρτηση F με την ιδιότητα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{S}$ καλείται αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{S}$.

(v) Ισχύει $\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα τής f.

(Μονάδες 6)

Β2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη, καθώς και τα σημεία καμπής τής c_f.

(Μονάδες 7)

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες τής c_f και το πεδίο τιμών τής f.

(Μονάδες 8)

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα *Β1*, *Β2*, *Β3* να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση c_f της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

Σημείωση: Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με την ιδιότητα $f''(x) > 3\big(2f'(x) - 3f(x)\big)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2018$ ολικό ακρότατο με τιμή μηδέν. Αν $h(x) = -e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$:

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = h(x)f(x)$ είναι κοίλη.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο άξονας των τετμημένων εφάπτεται της c_g.

(Μονάδες 7)

Γ3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 h(x)(x+1)dx = \frac{7e^{-3} - 4}{9}$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δις παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με αρχική $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε:

- η συνάρτηση F είναι περιττή
- η c_f διέρχεται από το σημείο $(-1,1)$, καθώς και από την αρχή των αξόνων
- η $c_{f'}$ τέμνει την ευθεία $y=3x-1$ σε σημείο με τετμημένη 1
- η συνάρτηση f'' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$
- η f'' έχει στο $x=0$ τιμή ίση με 2

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 3)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η c_f έχει:

(i) στο $x_0=0$ οριζόντια εφαπτομένη (μονάδες 2).

(ii) στο $x_1=1$ εφαπτομένη την ευθεία $(\varepsilon_1): y-2x+1=0$ (μονάδες 2).

(Μονάδες 4)

Δ3. Αν ισχύει $f(x)>F(-4)$ για κάθε $x\in(2,4)$, να δείξετε ότι

$$F(2)\ <\ 3\,F(4)$$

(Μονάδες 4)

Δ4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+f(x)-x^2}{1-\text{συν}x}$ (μονάδες 4)

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(x+f^2(x)\right)}{x-\text{ημ}x}$ (μονάδες 4)

(Μονάδες 8)

Δ5. Να δείξετε ότι:

$$F(2)\ \geq\ \frac{9}{4}\ +\ F\left(\frac{1}{2}\right)$$

(Μονάδες 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

<u>Επιμέλεια Θεμάτων:</u>

Καψαλιάρης Στέλιος
Νίκου Δημήτρης
Παπαθανασίου Νίκος
Σιταρίδης Σπύρος
Τογανίδης Νίκος
Χαραλαμπίδης Δημήτρης