ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 04 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: 1.8, 2.1 - 2.5

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να γράψετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 2+3

Α2. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Αν για κάθε $x \in$ Α ισχύει $|f(x)| = |g(x)|$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in$ Α ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in$ Α.

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίστε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σ, αν είναι σωστές ή με Λ, αν είναι λάθος.

α. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα.

β. Αν $f(t) = x^3 - x^2 - \ln x + \sigma\upsilon\nu t, x > 0$ τότε $f'(t) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x}$.

γ. Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε ένα διάστημα [α,β], τότε ικανοποιεί και τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α,β].

δ. Ισχύει $(\sigma\varphi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad \eta\mu x \neq 0$.

ε. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-2, & x<1 \\ \beta x^3+(a-1)x-1, & x\geq 1 \end{cases}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ$(-1,-3)$.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των α,β. **Μονάδες 8**

Αν $\alpha=2$ και $\beta=1$

Β2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α$\left(1,f(1)\right)$ **Μονάδες 7**

Β3. Να βρείτε όλες τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=4x-2019$ **Μονάδες 5**

Β4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f΄. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x+4}$

Γ1. Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το R και είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 4**

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}. **Μονάδες 6**

Γ3. i) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και $f(x)>x$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)>f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in f(R)$ **Μονάδες 6**

Γ4. Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x^2-5x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|f^3(x)-f(x)-7\right|-1}{x^2-5x}$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[2,8]\to R$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[2,8]$ και $f(2)f(4)f(8)=64$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x)>0$ για κάθε $x\in[2,8]$. **Μονάδες 2**

β. Υπάρχει $x_1\in(2,8)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=4$ **Μονάδες 4**

γ. Υπάρχει $x_2\in[2,8]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=x_2$ **Μονάδες 5**

Δ2. Έστω συνεχής συνάρτηση $g: R \to R$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $g(1) = \frac{1}{2}$, $g(3) = 2$. Αν ισχύει:

$$g\left(g(x)+1\right) g\left(g(x)\right) = g(g(x)+3) g\left(g(x)+2\right) \text{ για κάθε } x \in R$$

να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 1$ **Μονάδες 2**

β. $g(1)g(2) = g(3)g(4)$ **Μονάδες 3**

γ. Υπάρχει $x_1 \in [1,2]$ τέτοιο ώστε $g^2(x_1) = g(1)g(2)$ **Μονάδες 6**

δ. Η g δεν αντιστρέφεται. **Μονάδες 3**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΚΑΙ ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ !!!

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

ΚΑΨΑΛΙΑΡΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ

ΝΙΚΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΣΙΤΑΡΙΔΗΣ ΣΠΥΡΟΣ