ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
3 - 5 - 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΄Εστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$, λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α3. Στην παρακάτω πρόταση να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε:
΄Εστω δύο συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $f'(x)=g'(x)$. Ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επιπλέον, ώστε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$;

1. $f(2)=g(2)-2$
2. $f''(x)=g''(x)+c$ για κάθε $x\in R$
3. $f(0)=g(0)$
4. $f(1)=g(1)+1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε με **Σ**ωστό ή **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα, έτσι ώστε $f(A)\cap B=\varnothing$, τότε δεν ορίζεται η συνάρτηση $g\circ f$.

2. Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in N$.

3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

4. Ισχύει ότι $\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} e^x\,dx=\beta-\alpha$ με $\alpha>0$ και $\beta>0$.

5. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\ge 0$, τότε $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{2x}+\alpha e^{x}+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=4$ και ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1-\alpha-\beta}{x}=-2$.

Β1. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Αν $\alpha=-4$ και $\beta=4$ τότε:

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, και την κυρτότητα και να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$ και να δείξετε ότι $e^{2x}-4e^{x}+3\geq -2x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β4. **α)** Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη (ε): $y=-2x+1$ του ερωτήματος (Β3) και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

β) Αν E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να δείξετε ότι $E_1=E_2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4+4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι

$$[f(x)]^3+4f(x)=16x\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Γ1. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το πρόσημο της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4+4

Γ2. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\leq\beta$ ισχύει $|f(\alpha)-f(\beta)|\leq 4|\alpha-\beta|$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία (ζ): $4x-13y=0$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ4. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $[f(x)]^3+2e^{x}-|f''(\alpha)|x\geq 15x-4f(x)+2$, να βρείτε την τιμή $f''(\alpha)$, με $\alpha>0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1-x\ln x}{x-1} & , \quad x\in(0,1) \\ 1 & , \quad x=0 \\ x\ln x & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

Δ1. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) Να δείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4 +8

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x)+\dfrac{1}{2}\right)=0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ3. Αν $\rho>1$ είναι η μία από τις ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να δείξετε ότι:

$$\int_\rho^1 2f^2(x)\,dx > \int_\rho^1 f(x)\,dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ4. Να λύσετε στο $[0,+\infty)$ την εξίσωση: $\ln[f(x)+1]=1-e^{f(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καψαλιάρης Στέλιος

Νίκου Δημήτρης

Παπαθανασίου Νίκος

Σιταρίδης Σπύρος