

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ Λυκείου
Ημερομηνία: 03 Μαρτίου 2019

Θέμα Α

A₁. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 , ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

(Μονάδες 7)

A₂. Που αναζητούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

(Μονάδες 5)

A₃. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

(Μονάδες 3)

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή με το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λανθασμένη

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.
- Αν μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $f'(x_0) = 0$.
- Τα κρίσιμα σημεία της f σε ένα διάστημα Δ είναι μόνο τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός είναι ίση με 0.
- Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
- Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι οριζόντια.

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$.

B₁. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών και τα ακρότατα της f .

(Μονάδες 6)

B₂. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης. Να αποδείξετε, επιπλέον, ότι τα δύο σημεία καμπής είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

(Μονάδες 8)

B₃. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

(Μονάδες 4)



B4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x^4 + 2017} f \left(\frac{x^3 + x}{\ln x} + e^x \right) \right]$

(Μονάδες 7)

Θέμα Γ

Γ₁. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$x^2 f'(x) - (x^2 - 1)e^{-1-f(x)} = 0, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = \ln 2 - 1.$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

(Μονάδες 4)

iii. Αν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) οι ρίζες της f , να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

Γ₂. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = |3x + \alpha \epsilon \phi x - 2\eta \mu x|, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$

(Μονάδες 4)

β. Να βρείτε τον τύπο της f και να τον γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή.

(Μονάδες 5)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$(1+x^2) f'(x) = (x-1)^2 f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1$$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

(Μονάδες 6)

Δ₂. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$

(Μονάδες 5)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3-x}(x^2+1)) = \frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ακριβώς μια ρίζα.

(Μονάδες 5)

Δ₄. Έστω F μια παράγουσα της f στο \mathbb{R} .

A. Να αποδείξετε $F(3x) - F(x) < 2xf(3x)$ ότι για κάθε $x > 0$

(Μονάδες 4)



Φροντιστήρια

ΣΥΣΤΗΜΑ

ΚΕΝΤΡΟ

ΝΤΕΠΩ

ΕΥΟΣΜΟΣ

Αγίας Σοφίας 39 2310.244.444

Β. Όλγας 168 2310.428.400

Μ.Αλεξάνδρου 45 2310.770.360

Β. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{F(3x) - F(x)}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

(Μονάδες 5)

Καλή Τύχη!!!

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι καθηγητές

Στέλιος Καφαλιάρης

Δημήτρης Νίκου

Νίκος Παπαθανασίου

Σπύρος Σιταρίδης

ΣΥΣΤΗΜΑ