ΝΤΕΠΩ Β. Όλγας 168 2310.428.400
ΕΥΟΣΜΟΣ Μ.Αλεξάνδρου 45 2310.770.360

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
3 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Α2. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
Τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και κατόπιν αν είναι αληθής να τον αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

« Αν $\mathbf{f(x)>0}$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \mathbf{f(x)}$ τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f(x)>0}$ »

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε με **Σ** (Σωστό) ή **Λ** (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f θα παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.
2. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε αποκλείεται να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
3. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η παράγωγος f' είναι συνεχής στο x_0.
4. Ισχύει ότι $\left(10^x\right)'=x\cdot 10^{x-1}\cdot \ln 10$
5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, υπάρχουν $\alpha,\beta\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot f(x)\ ,\ x \in R$$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, h έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0=0$ και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$, $x \in R$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της στο $(-\infty, 0]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & ,\ x<0 \\ \frac{\beta x}{2} + \alpha & ,\ x \geq 0 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

α) Να βρείτε τους α, β.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Για $\alpha=0$ και $\beta=1$

β) Να βρείτε την $g'(x)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} x g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$, συνεχής και γνησίως μονότονη, τέτοια ώστε να ισχύει ότι

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = 3\mu \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -1} \frac{f(x)-1}{x+1} = \mu\ ,\quad \mu \in R$$

Γ1. Να δείξετε ότι: **α)** $f(-1) = -f(1) = 1$

β) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5+3

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in (-1,1)$ τέτοιος ώστε $3f(\xi) = f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x-1}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ4. Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' στο σημείο της $A(x_0, f'(x_0))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε): $y=\mu x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x>0 \quad \text{και} \quad e^{2f(x)}-2e^{f(x)}=\frac{1-x^2}{x^2}, \text{ για κάθε } x>0 \qquad (1)$$

Δ1. **α)** Να δείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x>0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$ και να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4+2

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\varrho\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $e^{\varrho}=\dfrac{\varrho+1}{\varrho}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ3. ΄Εστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)}$, $x>1$.

α) Να δείξετε ότι $h(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x>1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\cdot h(x)\right]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) ΄Ενα σημείο $A(\alpha, h(\alpha))$, $\alpha>1$ κινείται πάνω στην καμπύλη $y=h(x)$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2cm/s. ΄Εστω Μ το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_h στο Α τέμνει τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του Μ τη χρονική στιγμή που $\alpha=e$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ !

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Καψαλιάρης Στέλιος
Σιταρίδης Σπύρος