

Μαθηματικά Β Λυκείου

4 Ιανουαρίου 2019

Θέμα Α

A₁. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $\vec{a}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$.

(Μονάδες 5)

A₂. Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου να αποδείξετε την ιδιότητα:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 ,$$

όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα εφόσον $\vec{a}, \vec{\beta} \nparallel y'y$.

(Μονάδες 5)

A₃. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

(Μονάδες 5)

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu^2(\omega) + \eta\mu^2\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = 1$.
- ii. Όλες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν μια τουλάχιστον μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο πεδίο ορισμού τους.
- iii. Η εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ όταν $a = 0$.
- iv. Αν $\vec{a} \not\perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$.
- v. Ο συντελεστής διεύθυνσης μίας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$$A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2) \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ δίνεται απο τον τύπο } \lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

B₁. Να αντιστοιχίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της στήλης Α με τη σωστή απάντηση απο τη στήλη Β.

A	B
i. $\eta\mu 390^\circ$	α) $-\frac{1}{2}$
	β) $\epsilon\varphi x$
ii. $\epsilon\varphi\left(\frac{31\pi}{6}\right)$	γ) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	δ) $-\sigma\upsilon\nu x$
iii. $\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)$	ε) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
	στ) $\eta\mu x$
iv. $\sigma\upsilon\nu(37\pi - x)$	ζ) $\frac{1}{2}$
	η) $\sigma\upsilon\nu x$
v. $\sigma\varphi(990^\circ - x)$	θ) $\sigma\varphi x$
	ι) $-\eta\mu x$

(Μονάδες 10)

B₂. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. Αν η γραφική παράσταση της $\varphi(x)$ προκύπτει απο την γραφική παράσταση της $f(x)$ με μετατόπιση κατά **δύο** μονάδες προς τα επάνω και **τρεις** μονάδες προς τα αριστερά τότε:

α) $\varphi(x) = f(x - 2) + 3$ β) $\varphi(x) = f(x + 3) + 2$
 γ) $\varphi(x) = f(x - 3) + 2$ δ) $\varphi(x) = f(x + 2) - 3$

(Μονάδες 3)

ii. Αν η γραφική παράσταση της $K(x)$ προκύπτει απο την γραφική παράσταση της $f(x)$ με μετατόπιση κατά **τέσσερις** μονάδες προς τα επάνω και **δύο** μονάδες προς τα δεξιά τότε:

α) $K(x) = f(x - 2) + 4$ β) $K(x) = f(2x + 4)$
 γ) $K(x) = f(x - 4) + 2$ δ) $K(x) = f(x + 2) + 4$

(Μονάδες 3)

B₃. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(210^\circ) \cdot x^3 + x^{\epsilon\varphi(135^\circ)}$.

i. Να απλοποιηθεί ο τύπος της f

(Μονάδες 3)

ii. Αν $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{x}$ να

- α) βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και
 β) η μονοτονίας της f στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

(Μονάδες 3+3)

Θέμα Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκος πλευράς $(ΑΓ) = 2\sqrt{3}$, γωνία $\hat{A} = 150^\circ$, Μ μέσο της ΒΓ και συντεταγμένες διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (1, \sqrt{3})$.

- i. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$
(Μονάδες 5)
- ii. Να εκφράσετε τη διάμεσο \overrightarrow{AM} ως γραμμικό συνδιασμό των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ και να βρείτε το μέτρο της
(Μονάδες 2+5)
- iii. Να βρεθεί το είδος των γωνιών $B\hat{A}M$ και $M\hat{A}G$
(Μονάδες 7)
- iv. Αν οι συντεταγμένες της κορυφής Α είναι $A(-1, 4)$ να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία είναι η πλευρά ΑΒ του τριγώνου.
(Μονάδες 6)

Θέμα Δ

Δίνεται τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{5}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{5}} \right) + \alpha \eta \mu \left(\frac{5\pi}{2} + \omega x \right)$

για την οποία γνωρίζουμε ότι έχει περίοδο $T = 6\pi$ και διέρχεται από το σημείο $A(3\pi, 3)$.

- i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1$
(Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$
(Μονάδες 7)
- iii. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη συμμετρία (Άρτια- Περιττή)
(Μονάδες 4)
- iv. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σε πλάτος μιας περιόδου.
(Μονάδες 6)
- v. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(5\pi)$ και $f\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 3)



Τα θέματα επιμελήθηκαν οι καθηγητές:

Καμπερίδης Χαράλαμπος

Καψαλιάρης Στέλιος

Σιταρίδης Σπύρος

Χωνιανάκης Αντώνης

Καλή Επιτυχία!!!!