ΑΠΑΝΤΗΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Α. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 335

Β1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 225

Β2. **α)** $\rightarrow$ Λάθος **β)** $\rightarrow$ Λάθος **γ)** $\rightarrow$ Σωστό **δ)** $\rightarrow$ Σωστό **ε)** $\rightarrow$ Σωστό

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α. f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = $i^3 \cdot z + i^8 \cdot z + i^{13} \cdot z + i^{18} \cdot z = -iz + z + iz - z = 0$

β. **z = ρ** · (συνθ + iημθ)
$f(13) = i^{13} . z = iz =$

$$\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) \cdot \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

γ. **<u>Α΄ τρόπος</u>**

Έστω Α η εικόνα του z και Β η εικόνα του f(13) = iz, οπότε $A\hat{O}B = 90^o$.

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2}|z| \cdot |iz| = \frac{1}{2}|i| \cdot |z|^2 = \frac{1}{2}4 = 2\tau.\mu.$$

<u>Β΄ τρόπος</u>

$$z = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$ οπότε A(1, $\sqrt{3}$).

f(13) = iz = i (1 + i$\sqrt{3}$) = - $\sqrt{3}$ + i οπότε Β(- $\sqrt{3}$,1)

$\vec{OA} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{OB} = (-\sqrt{3}, 1)$

$$\det\left(\vec{OA}, \vec{OB}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Οπότε, $(OAB) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{OA}, \vec{OB}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\ \tau.\mu.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α. Έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Οπότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ ή $(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$ και αφού fog είναι 1 – 1 τότε $x_1 = x_2$. Άρα, η g είναι 1 – 1.

β. Επειδή η g είναι 1 – 1 ισχύει:
$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x)+2x - 1) \Leftrightarrow f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$
Έστω $h(x) = x^3 - 3x + 1,\ x\in\Re$
h συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $h'(x)= 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
h		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$

h(-1)=3 και h(1)= - 1

- Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$, οπότε $h(A_1) = (\lim\limits_{x\to-\infty} h(x), h(-1)] = (-1,3]$ και αφού $0\in h(A_1)$ η εξίσωση h(x)=0 έχει ακριβώς μια αρνητική ρίζα στο A_1.

- Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2= [-1,1]$, οπότε $h(A_2) = [h(1), h(-1)]= [-1,3]$ και αφού h(0)=1 και $h(0)\cdot h(1)= 1\cdot(-1)= -1 <0$ η εξίσωση h(x)=0 έχει ακριβώς μια θετική ρίζα στο (0,1) άρα και στο A_2.

- Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_3= [1,+\infty)$, οπότε $h(A_3) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)) = [-1, +\infty)$ και αφού $0\in h(A_3)$ η εξίσωση h(x)=0 έχει ακριβώς μια θετική ρίζα στο A_3. Οπότε η h(x)=0 έχει ακριβώς δυο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4^{ου} ΘΕΜΑΤΟΣ

α. Έστω $\varphi(x) = h(x) - g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$

Επειδή η φ είναι συνεχής στο [α,β] με φ(x)>0 για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε: $\int_{\partial}^{\beta}\varphi(x)dx > 0$ ή

$\int_{\alpha}^{\beta}(h(x)-g(x))dx > 0$ ή

$\int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx > 0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

β.

i. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της ισότητας έχουμε:

$$f'(x) + e^{-f(x)}\cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}}$$

ii. Η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0,x] για κάθε x>0 άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} > 0, x\in\Re.$$

$f\,''(x) = \dfrac{f\,'(x) \cdot e^{-f(x)}}{(1+e^{-f(x)})^2} > 0$ για κάθε x∈$\Re$. Άρα, f ΄ γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Είναι 0<ξ<x, οπότε f΄ (0)<f ΄(ξ)<f΄(x) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{x} < f\,'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{x}{2} < f(x) < x \cdot f\,'(x)$.

iii. Είναι f ΄(x)>0 για κάθε x∈$\Re$ άρα f↑ στο $\Re$. Οπότε για κάθε x≥ 0 είναι f(x) ≥ f(0) ή f(x) ≥ 0. Άρα, το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι $E = \int_0^1 f(x)dx$.

Από το Β ii, έχουμε ότι: $\dfrac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x), x > 0$ και προφανώς

$\dfrac{x}{2} \le f(x) \le xf'(x),$ για x ≥ 0. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 τότε:

$$\int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx$$

- Έχουμε $\int_0^1 \dfrac{x}{2}dx < E$ ή $\dfrac{1}{4}[x^2]_0^1 < E$ ή $\dfrac{1}{4} < E$
- $E < \int_0^1 x \cdot f'(x)dx$ ή $E < \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$ ή

E < f(1) – E ή E< $\dfrac{1}{2}$f(1). Άρα, $\dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2}f(1)$.