ΑΠΑΝΤΗΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Α. α. Είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων (σελίδα 65 σχολικό βιβλίο).

β. Είναι το πηλίκο της συχνότητας v_i με το μέγεθος v του δείγματος.

Δηλαδή $f_i = \frac{v_i}{v}, i = 1,2,...k$.

(Σελίδα 65, σχολικό βιβλίο).

γ. i. $0 \le f_i \le 1$ για i = 1,2,…,k αφού $0 \le v_i \le v$

ii. $f_1 + f_2 + \ldots + f_k =$

$$\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + ... + \frac{v_k}{v} =$$

$$= \frac{v_1 + v_2 + ... + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1$$

(Σελίδα 65, σχολικό βιβλίο).

Β.1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 150.

Β.2. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 148

β. i. $P(\Omega) = 1$

ii. $P(\varnothing) = 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2^{ου} ΘΕΜΑΤΟΣ

α. Για να ορίζεται η f πρέπει : $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Άρα $A = \Re - \{-1\}$

β. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

γ. $f'(x)z = \frac{(2x)' \cdot (x+1) - 2x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}, \ x \neq -1$

δ. Τα σημεία (x, f(x)) της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην ευθεία y = 2x + 5 είναι εκείνα για τα οποία ισχύει :

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \text{ ή } x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2$$

Οπότε f(0) = 0 και f(-2) = 4

Τα σημεία επαφής είναι το 0 (0,0) και Α (-2,4).

Έστω ε : y = λx + β η εξίσωση της εφαπτομένης.

Αφού είναι παράλληλη με την ευθεία δ: y = 2x + 5 , είναι λ = 2. Άρα, ε : y = 2x + β

- Το σημείο 0(0,0) επαληθεύει την ε οπότε : $0 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$

  Άρα, ε_1 : y = 2x

- Το σημείο Α(-2 ,4) επαληθεύει την ε οπότε: $4 = 2 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 8$

Άρα, ε_2: y = 2x + 8.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3^{ου} ΘΕΜΑΤΟΣ

Οι τιμές είναι : 8,9,10,13,13,14,14,15,16,18

α. $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1}{10}(8+9+...+18) = \frac{130}{10} = 13$

$\delta = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$

Υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές : $M_o = 13$, $M_0 = 14$

β. R = 18 – 8 = 10

$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2 \quad = \frac{1}{10}\left[(8-13)^2 + (9-13)^2 + ... + (18-13)^2\right] = \frac{1}{10}\cdot 90 = 9$

Άρα S = 3

$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{3}{13}$

δηλαδή CV $\approx$ 23,08 %.

γ. Αν x_1, x_2,…, x_{10} οι αρχικές τιμές και y_1, y_2,…,y_{10} οι τιμές που προκύπτουν μετά την έκπτωση των αντίστοιχων τιμών κατά 10%. Τότε η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ θα μειωθεί κατά 10%, δηλαδή : $\bar{y} = \bar{x} - \frac{10}{100}\bar{x} = 0{,}9\cdot\bar{x}$.

Η νέα τυπική απόκλιση είναι $S_Y = |0{,}9|\cdot S_x = 0{,}9\,S_x$

$CV_y = \frac{S_Y}{\bar{y}} = \frac{0{,}9\cdot S_x}{0{,}9\cdot\bar{x}} = \frac{S_x}{\bar{x}} = CV_x$

Άρα, ο συντελεστής μεταβολής δεν μεταβάλλεται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4^{ου} ΘΕΜΑΤΟΣ

α. Έχουμε : $P(A) + P(B) \neq 2P(A\cap B)$ ή $P(A) + P(B) - P(A\cap B) \neq P(A\cap B)$ ή $P(A\cup B) \neq P(A\cap B)$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με :

f ΄ (x) = 3(x – P (AB))^2 · (x- P(AB))΄ - 3 (x – P(AB)^2 . (x- P (AB)) ΄ =

$= 3(x - P(A\cup B))^2 - 3(x - P(A\cap B))^2 \quad = ... = 3(2x - P(A) - P(B))\cdot(P(A\cap B) - P(A\cup B))$

Έχουμε : $A\cap B \subseteq A\cup B$

οπότε : $P(A\cap B) \leq P(A\cup B)$, δηλαδή : $P(A\cap B) - P(A\cup B) < 0$

αφού $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3(2x - P(A) - P(B))\,(P(A\cap B) - P(A\cup B)) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - P(A) - P(B) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$

x	$-\infty$		P(A) + P(B)/ 2		$+\infty$
f΄		+	0	-	
f		↗	max	↘	

Άρα, για $x = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο.

γ. Αφού $A \cap B = \varnothing$ τότε
$P(A \cap B) = 0$ και $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$f(P(A)) = (P(A) – P(A) – P(B))^3 – (P(A))^3 = - [P(B)]^3 – [P(A)]^3$
$f(P(B)) = (P(B) – P(A) – P(B))^3 – (P(B))^3 = - [P(A)]^3 – [P(B)]^3$

Άρα, f (P(A)) = f(P(B)).