Πανελλαδικές Εξετάσεις
Μαθηματικά Κατεύθυνσης
18 Μαΐου 2016

Θέμα Α

Α$_1$. Σελ 262, Σχολικό βιβλίο

Α$_2$. Σελ 141, Σχολικό βιβλίο

Α$_3$. Σελ 251, Σχολικό βιβλίο

Α$_4$. Α) Λ Β) Σ Γ) Λ Δ) Σ Ε) Σ

Θέμα Β

Β$_1$. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ με πεδίο ορισμού $D_f=\mathbb{R}$. Η $f(x)$ συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\ .$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ολικό ελάχιστο

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$.

Β$_2$. $$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -6x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Η f είναι κοίλη για τα $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ και κυρτή για $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

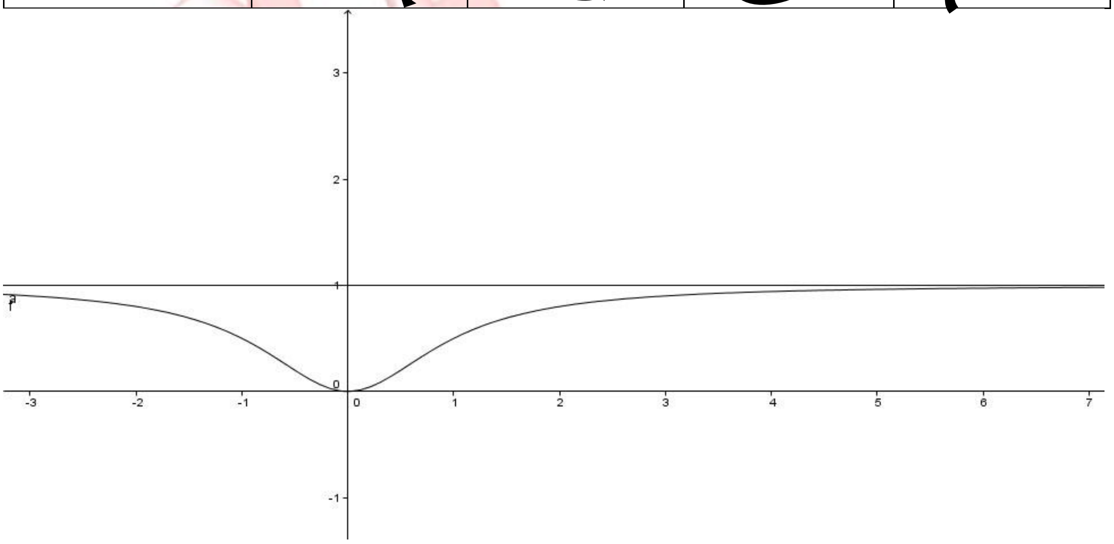
με σημεία καμπής τα $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

Β3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$, η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$, οπότε δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$

Δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη γιατί η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbf{R}$

Β4.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$									



Θέμα Γ

Γ₁. Θέτω $g(x)=e^{x^2}-x^2-1,\quad x\in\mathbb{R}$. Η $g(x)=0$ έχει προφανή λύση $x=0$.

Είναι $g'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
$e^{x^2}-1$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

$g(0)=0$, άρα $g(x)\geq 0$

Γ₂. $|f(x)|=|g(x)|\Rightarrow|f(x)|=g(x)$ και $g(x)$ έχει μοναδική λύση για $x=0$.
$g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και «1-1» ισχύει μόνο για $x=0$, άρα
και η $f(x)$ θα έχει μοναδική ρίζα το $x=0$.

Η f συνεχής και $f(x)\neq 0$ στο $\mathbb{R}^*$, άρα στο $(-\infty,0)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο, ομοίως στο $(0,+\infty)$ οπότε έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $f(x)>0,\ (-\infty,0),(0,+\infty)\ \rightarrow\ f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$
2. $f(x)>0,(-\infty,0)$ και $f(x)<0,\ (0,+\infty)\ \rightarrow\ f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\leq 0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & x>0 \end{cases}$
3. $f(x)<0,\ (-\infty,0),(0,+\infty)\ \rightarrow\ f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$
4. $f(x)<0,\ (-\infty,0),\quad f(x)>0,\ (0,+\infty)\ \rightarrow\ f(x)=\begin{cases} -(e^{x^2}-x^2-1), & x<0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}$

Γ₃.

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1)$

$f''(x)=2e^{x^2}+e^{x^2}\cdot 4x^2-2=2(e^{x^2}+e^{x^2}\cdot 2x^2-1)$

$f^{(3)}(x)=2\left(e^{x^2}\cdot 2x+e^{x^2}\cdot 4x^3+e^{x^2}\cdot 4x\right)=4x\left(e^{x^2}+2e^{x^2}\cdot x^2+2e^{x^2}\right)=4xe^{x^2}(3+2x^2)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$
$f(x)$		∪	

$$f''(0)=0$$

$$\begin{cases} \forall x>0 \overset{f''\nearrow}{\Rightarrow} f''(x)>0 \\ \forall x<0 \overset{f''\searrow}{\Rightarrow} f''(x)>0 \end{cases}$$

Αφού f' συνεχής στο 0, η f' είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, οπότε f κυρτή

Γ4.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$ $\Leftrightarrow h(|\eta\mu x|)=h(x)$ (1) με

$h'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0$

$x<x+3,\ f'\nearrow$

$f'(x)<f'(x+3)$

$h\nearrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα «1-1» $(1)\Leftrightarrow |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow$ x=0 από τη γνωστή ανισότητα

$|\eta\mu x|\le|x|$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Θέμα Δ

Δ1.

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$$

$g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)\eta\mu x=0=f(0)$, επειδή η f συνεχής

Επομένως $f(\pi)=\pi$

Α' Τρόπος

$e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όλες οι συναρτήσεις παραγωγίσιμες, άρα

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^{x}$

$e^{f(0)}\cdot f'(0)+1=f'(f(0))\cdot f'(0)+1$

$f'(0)+1=f'(0)^2+1\Rightarrow f'(0)^2-f'(0)=0\Rightarrow f'(0)\left(f'(0)-1\right)=0\Rightarrow\quad f'(0)=0\quad ή\quad f'(0)=1$

Αν $f'(0)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\mathrm{f}(0)}{x-0}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

τότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\mathrm{x})}{\eta\mu x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(\mathrm{x})}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=1\Leftrightarrow\dfrac{0}{1}=1\Leftrightarrow$ <u>άτοπο</u>

Άρα μοναδική λύση $f'(0)=1$

Β' Τρόπος

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

Δ2.

α. $e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^{x}\qquad(2)$

Έστω ότι υπάρχει x_0 : $f'(x_0)=0$, στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο, τότε από Θεώρημα Fermat η (2) για $x=x_0$ γίνεται

$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}$

$e^{x_0}=1$

$x_0=0,\ \ άτοπο$

Άρα θα παρουσιάζει ακρότατο

$f'(0)=1\neq0$

β. $\left.\begin{array}{l} f'(x)\neq0,\ συνεχής \\ f'(0)=1 \end{array}\right\}\ f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\nearrow$

Δ3.

$f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$, $f\nearrow$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, άρα $f(\mathbf{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbf{R}$

, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \;\to\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\frac{2}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\frac{2}{|f(x)|}\le\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\frac{2}{|f(x)|}$$

Επειδή $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\le|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|\le 2$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4.

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$$

Θέτω $u=\ln x \;\to\; du=\dfrac{1}{x}dx,\quad u_1=0,\ u_2=\pi$

$$\int_0^\pi f(\mathrm{u})\,\mathrm{du}$$

Επειδή $0\le x\le\pi\overset{\nearrow}{\Rightarrow} f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(x)\le\pi$

με την ισότητα να ισχύει για $x=0, x=\pi$

Άρα $\int_0^\pi 0du<\int_0^\pi f(x)dx<\int_0^\pi \pi du \;\Leftrightarrow 0<\int_0^\pi f(x)dx<\pi^2$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Γασπαράτος Ανδρέας
Ίμπος Χρήστος
Καψαλιάρης Στυλιανός
Νίκου Δημήτρης
Παλτσόκας Παναγιώτης
Παπαθανασίου Νίκος
Σιταρίδης Σπύρος